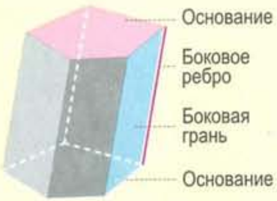
Тела

Многогранник

Призма



Параллелепипед

Противолежащие грани равны.
Противолежащие ребра равны.
Противолежащие грани параллельны.
Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

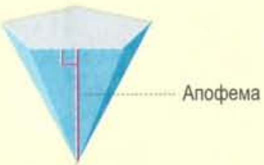
Пирамида

Прямая призма

$S_{бок} = Pl$

P — периметр основания,
l — боковое ребро.

Правильная пирамида



$S_{бок} = pl$

p — полупериметр основания,
l — апофема.

Правильная призма

Прямой параллелепипед

Конус

$S_{бок} = \frac{1}{2} Cl$

C — длина окружности основания,
l — образующая.

Цилиндр

$S_{бок} = Cl$

C — длина окружности основания,
l — образующая.

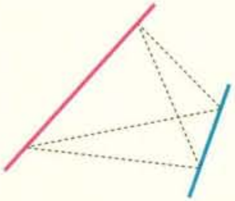
Прямоугольный параллелепипед

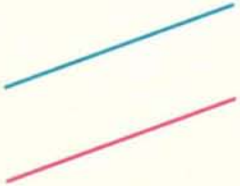
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

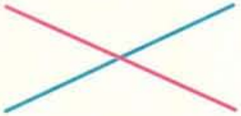
d — диагональ,
a, b, c — измерения.

Прямые в пространстве

Две прямые → Принадлежат одной плоскости?
- Нет → Скрещивающиеся
- Да → Имеют общую точку?
  - Нет → Параллельные
  - Да → Пересекающиеся

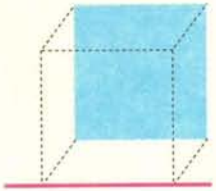


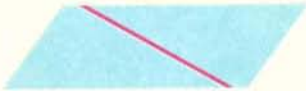


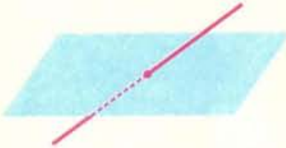


Прямая и плоскость в пространстве

Прямая и плоскость → Имеют общие точки?
- Нет → Параллельные
- Да → Общая точка единственная?
  - Нет → Прямая лежит в плоскости
  - Да → Пересекающиеся







Две плоскости в пространстве

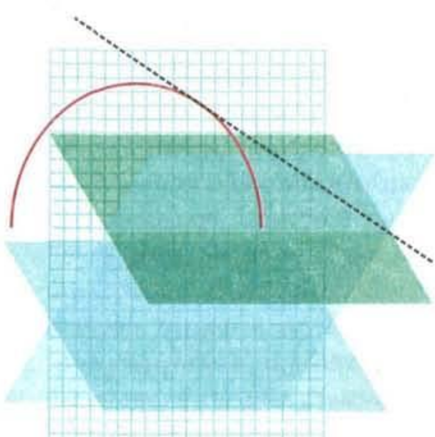
Две плоскости → Имеют общие точки?
- Нет → Параллельные
- Да → Пересекающиеся

Л. А. Латотин Б. Д. Чеботаревский

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для 11 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь



Минск «Народная асвета» 2007

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721
Л27

Перевод с белорусского языка *И. П. Ефременко*

Рецензенты:

кафедра алгебры и методики преподавания математики
Витебского государственного университета им. П. М. Машерова
(доктор пед. наук, профессор *К. О. Ананченко*);
учитель гимназии № 11 г. Минска *И. Г. Арефьева*

ISBN 978-985-12-1868-0

Дорогие друзья!

Это учебное пособие обеспечивает изучение математики в 11-м классе на базовом и повышенном уровнях. Материал, предназначенный для дополнительного изучения на повышенном уровне, помещен между специальными знаками ▶ и ◀ или выделен в отдельные параграфы, отмеченные звездочкой.

Вы познакомитесь с важнейшим понятием математики — понятием производной, которое имеет самое широкое применение. В этом классе вам надо будет усвоить многие формулы и алгоритмы. Важно, чтобы вы их не только запомнили, но и чтобы за формальными действиями не забывали их смысл, осознавали, на решение каких задач эти действия направлены.

Организация учебного пособия такая же, как и в предыдущих классах. Каждый параграф начинается с обсуждения вопроса, обозначенного в названии параграфа. Наиболее важное выделено специальными шрифтами. Новые понятия выделяются **полужирным шрифтом**. Правила и утверждения выделены ***полужирным курсивом***, а понятия и факты, на которые стоит обратить внимание, но необязательно запоминать, — *курсивом*.

После объяснительного текста идут контрольные вопросы, отмеченные знаком **?** . Они предназначены для проверки того, как вы усвоили содержание объяснительного текста. Если на тот или иной вопрос вы не смогли ответить, нужно вернуться к объяснительному тексту и с его помощью попробовать ответить на этот вопрос вновь.

Упражнения, идущие после контрольных вопросов, разделены на три группы.

Упражнения первой группы посвящены тем вопросам, которые обсуждались в объяснительном тексте. Они имеют, в основном, тренировочный характер, хотя среди них могут встретиться и более сложные.

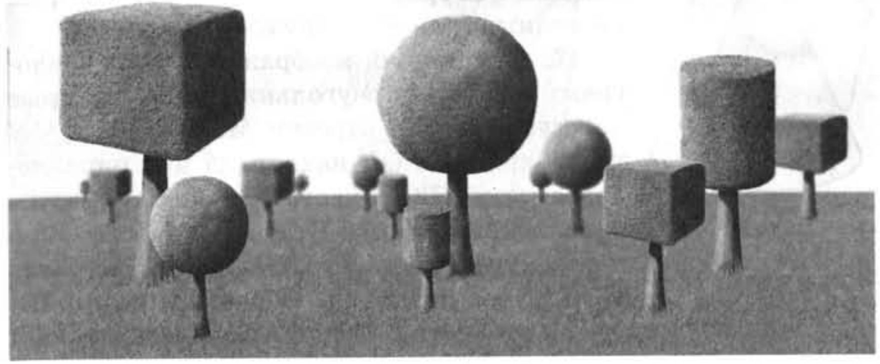
Вторую группу после разделительной горизонтальной черты составляют разнообразные упражнения на повторение. При их выполнении вам нужно будет применить знания, полученные ранее, в том числе и в предыдущих классах.

Задачи третьей группы, идущие после трех разделительных звездочек, являются в чем-то нестандартными. Они потребуют творческих подходов, самостоятельности в рассуждениях. Вместе с тем для их решения у вас достаточно знаний.

Желаем вам успехов!

Авторы

Раздел I



ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

1. Пространственные фигуры

Вы знаете, что геометрические фигуры делятся на **плоские** и **пространственные**, в зависимости от того, все или не все точки фигуры принадлежат одной плоскости. Плоские фигуры вы изучали в предыдущих классах, тогда же вы познакомились и с некоторыми пространственными фигурами — призмой (рис. 1), пирамидой (рис. 2), цилиндром (рис. 3), конусом (рис. 4), шаром (рис. 5). Раздел геометрии, в котором изучаются плоские фигуры, называется *планиметрией*, а раздел, в котором изучаются пространственные фигуры, — *стереометрией*.

Ту или иную пространственную фигуру приходится изображать на плоскости листа в тетради или на плоскости доски. Соответствующий рисунок выполняют так, чтобы он создавал

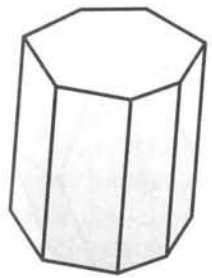


Рис. 1

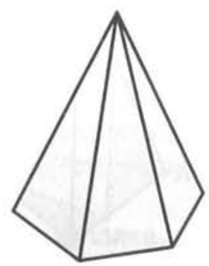


Рис. 2

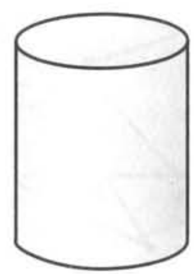


Рис. 3

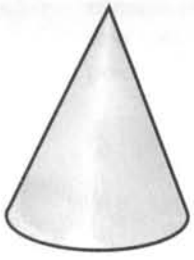


Рис. 4

Рис. 5

такое же представление, как и сама изображаемая фигура. При этом линии, которые не видны, делают *штриховыми*.

На рисунке 6 изображены параллелограмм $ABCD$ и треугольник PQR, которые пересекаются по отрезку MN. Часть QMN треугольника PQR находится над параллелограммом $ABCD$, часть $PMNR$ — под этим параллелограммом. При этом часть PKL четырехугольника $PMNR$ видна, а часть $KMNRL$ — не видна. Обращаем внимание на то, что точки K и L треугольника PQR не принадлежат параллелограмму $ABCD$, а значит, и его стороне AD.

На рисунке 7 изображена треугольная пирамида $DABC$, которую пересекает плоскость по четырехугольнику $MNOP$. При этом у пирамиды невидимым является ребро AB, а у сечения $MNOP$ — его стороны NO и MP.

Представление пространственной фигуры на рисунке называют **изображением фигуры**.

Важным классом пространственных фигур являются *многогранники*, под которыми понимают тела, ограниченные плоскими многоугольниками. Эти многоугольники называются **гранями** многогранника, их вершины — **вершинами** многогранника, а стороны — **ребрами** многогранника.

Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника (рис. 8).

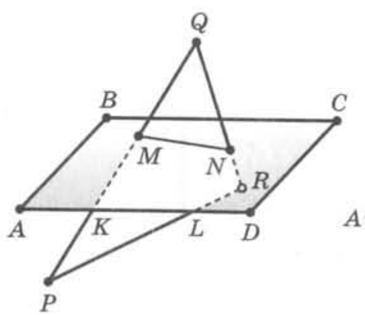


Рис. 6

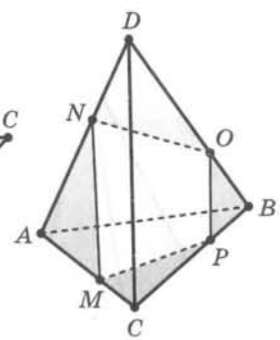


Рис. 7

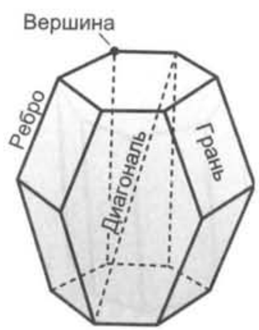


Рис. 8

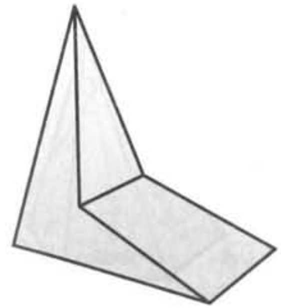


Рис. 9

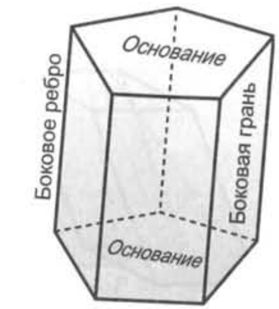


Рис. 10

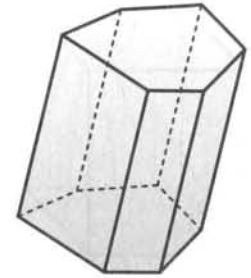


Рис. 11

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости любой его грани. На рисунке 9 изображен *невыпуклый* многогранник.

Мы будем изучать простейшие выпуклые многогранники — призмы и пирамиды.

Призмой называется многогранник, две грани которого — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы.

Равные грани-многоугольники призмы называются ее **основаниями**, а остальные грани — **боковыми гранями**. Ребра боковой грани, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми ребрами** (рис. 10).

В зависимости от количества сторон основания призмы отличают **треугольную, четырехугольную, пятиугольную** и т. д. призмы. На рисунке 11 изображена шестиугольная призма.

Призмы делятся на *прямые* и *наклонные* в зависимости от того, перпендикулярны или не перпендикулярны ребрам оснований боковые ребра призмы.

Обычно на изображении прямой призмы ее боковые ребра проводят вертикально (рис. 12). Боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

Прямая призма называется **правильной**, если ее основания являются правильными многоугольниками.

Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется **параллелепипедом**.

Параллелепипед, как призма, может быть и прямым (рис. 13), и наклонным (рис. 14).

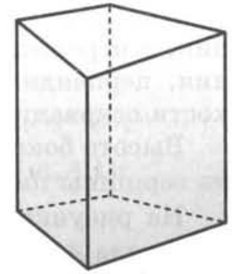


Рис. 12

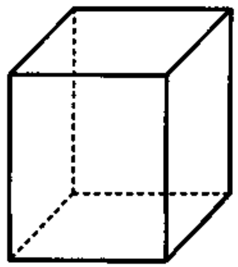


Рис. 13

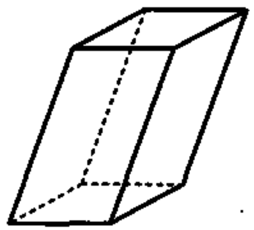


Рис. 14

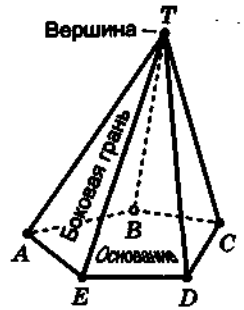


Рис. 15

Прямой параллелепипед, основания которого являются прямоугольниками, называется **прямоугольным параллелепипедом.**

Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются **измерениями** прямоугольного параллелепипеда.

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется **кубом.**

Все грани куба — равные друг другу квадраты.

Пирамидой называется многогранник, одна грань которого — многоугольник, а остальные являются треугольниками с общей вершиной.

На рисунке 15 изображена пирамида $TABCDE$. Многоугольник $ABCDE$ называют **основанием пирамиды**, треугольные грани ATB, BTC, CTD, DTE, ETA — **боковыми гранями**, а общую вершину T боковых граней — **вершиной пирамиды.**

В зависимости от количества сторон основания пирамиды отличают **треугольную, четырехугольную, пятиугольную** и т. д. пирамиды. Пирамида на рисунке 15 — пятиугольная, а на рисунке 16 — треугольная.

Пирамида, основание которой — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий ее вершину с центром основания, перпендикулярен любой прямой, проведенной в плоскости основания через этот центр, называется **правильной.**

Высота боковой грани правильной пирамиды, опущенная из вершины пирамиды, называется **апофемой** пирамиды.

На рисунке 17 изображена правильная четырехугольная пирамида $APQRS$ и одна из ее апофем — отрезок AB.

Теорема 1. ***У правильной пирамиды равны ее: а) боковые ребра; б) боковые грани; в) апофемы.***

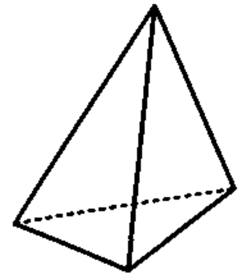


Рис. 16

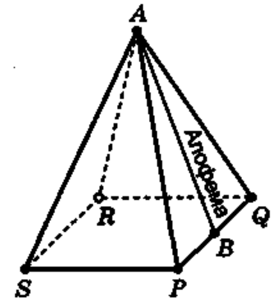


Рис. 17

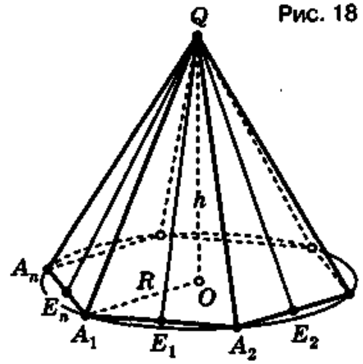


Рис. 18

Доказательство. Пусть $QA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида и точка O — центр ее основания (рис. 18).

а) Отрезки OA_1, OA_2, ..., OA_n равны, так как являются радиусами описанной около основания окружности. Прямоугольные треугольники OQA_1, OQA_2, ..., OQA_n имеют пары равных катетов, поэтому они равны, а значит, равны и их гипотенузы: $QA_1 = QA_2 = ... = QA_n$.

б) Поскольку боковые ребра пирамиды $QA_1A_2...A_n$ равны друг другу, то ее боковые грани — равнобедренные треугольники, основания которых равны, так как многоугольник $A_1A_2...A_n$ — правильный. Поэтому боковые грани равны друг другу по трем сторонам.

в) Поскольку боковые грани пирамиды $QA_1A_2...A_n$ равны друг другу, то равны и их высоты, проведенные из вершины Q, т. е. равны апофемы пирамиды $QA_1A_2...A_n$.

Теорема 2. ***Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания и апофемы.***

Доказательство. Пусть $QA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида (см. рис. 18). Площадь S ее боковой поверхности состоит из площадей боковых граней, которые являются равными друг другу равнобедренными треугольниками с апофемами QE_1, QE_2, ..., QE_n, равными друг другу. Поэтому

$$S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + ... + S_{A_nQA_1} = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2}A_2A_3 \cdot QE_2 + ... +$$
$$+ \frac{1}{2}A_nA_1 \cdot QE_n = \frac{1}{2}QE_1 \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1) =$$
$$= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1}{2} \cdot QE_1 = p \cdot a,$$

где p — полупериметр основания пирамиды, a — апофема пирамиды.

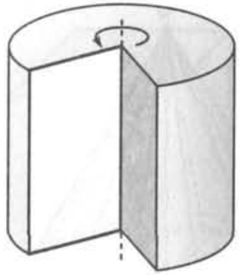


Рис. 19

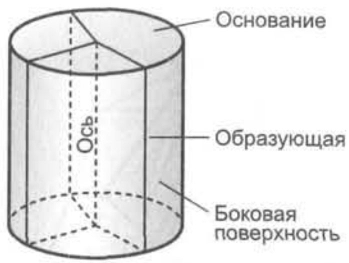


Рис. 20

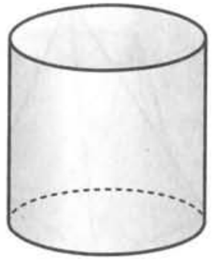


Рис. 21

Еще один класс пространственных фигур составляют тела вращения, к которым относятся цилиндр, конус, шар.

Цилиндром называется тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 19). При этом вращении одна сторона прямоугольника остается неподвижной, ее называют *осью цилиндра*. Сторона, противолежащая оси, образует поверхность, которую называют *боковой поверхностью цилиндра*, а саму сторону — *образующей цилиндра*. Еще две стороны прямоугольника образуют поверхности, которые являются равными кругами, эти круги называют *основаниями цилиндра* (рис. 20). На рисунке 21 дано изображение цилиндра.

Конусом называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 22), который называют *осью конуса*. Другой катет описывает круг, который называют *основанием конуса*, неподвижную вершину треугольника, которая не принадлежит основанию, называют *вершиной конуса*. Гипотенуза при вращении образует поверхность, которую называют *боковой поверхностью конуса*, саму гипотенузу называют *образующей конуса* (рис. 23). На рисунке 24 дано изображение конуса.

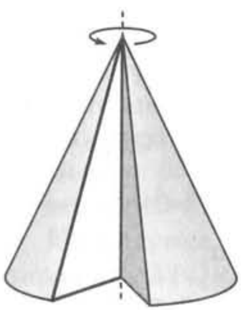


Рис. 22

Рис. 23

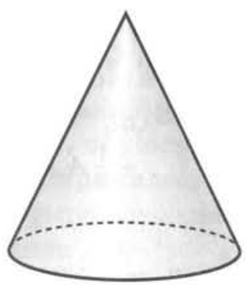


Рис. 24

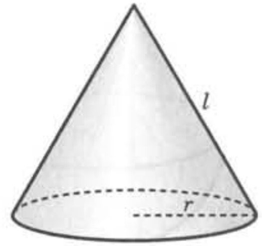


Рис. 25

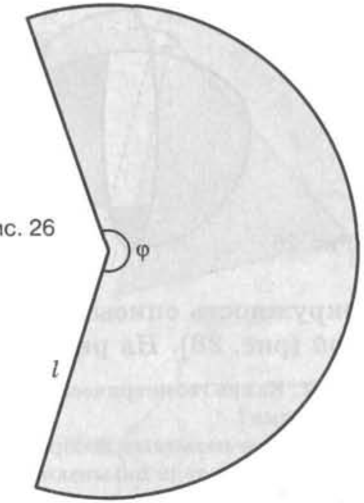


Рис. 26

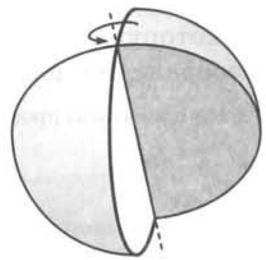


Рис. 27

Теорема 3. ***Площадь боковой поверхности конуса равна произведению полуокружности его основания и образующей.***

Доказательство. Пусть имеется конус, радиус основания которого равен r, а образующая — l (рис. 25). Развернем боковую поверхность конуса на плоскость, в результате получится сектор, радиус которого равен образующей l (рис. 26). Найдем центральный угол φ этого сектора, приняв во внимание, что ему соответствует дуга окружности, равная длине окружности основания конуса, т. е. равна $2\pi r$. Поскольку длина всей окружности, связанной с сектором, равна $2\pi l$ и этой длине соответствует полный угол, равный $360°$, то

$$\varphi = \frac{360°}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \frac{360° \cdot r}{l}.$$

Теперь найдем площадь S сектора с радиусом l и углом φ:

$$S = \frac{\pi l^2}{360°} \cdot \frac{360° \cdot r}{l} = \pi r \cdot l.$$

Поскольку выражение πr представляет длину полуокружности основания конуса, можем утверждать, что площадь боковой поверхности конуса равна произведению полуокружности его основания и образующей.

Шаром называется тело, полученное вращением круга вокруг своего диаметра (рис. 27). При этом вращении

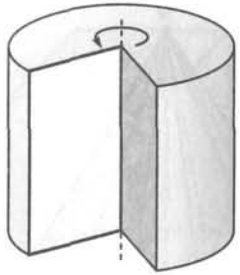


Рис. 19

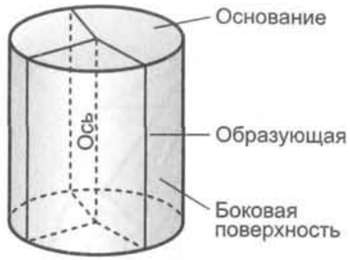


Рис. 20

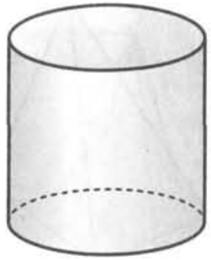


Рис. 21

Еще один класс пространственных фигур составляют тела вращения, к которым относятся цилиндр, конус, шар.

Цилиндром называется тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 19). При этом вращении одна сторона прямоугольника остается неподвижной, ее называют *осью цилиндра*. Сторона, противолежащая оси, образует поверхность, которую называют *боковой поверхностью цилиндра*, а саму сторону — *образующей цилиндра*. Еще две стороны прямоугольника образуют поверхности, которые являются равными кругами, эти круги называют *основаниями цилиндра* (рис. 20). На рисунке 21 дано изображение цилиндра.

Конусом называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 22), который называют *осью конуса*. Другой катет описывает круг, который называют *основанием конуса*, неподвижную вершину треугольника, которая не принадлежит основанию, называют *вершиной конуса*. Гипотенуза при вращении образует поверхность, которую называют *боковой поверхностью конуса*, саму гипотенузу называют *образующей конуса* (рис. 23). На рисунке 24 дано изображение конуса.

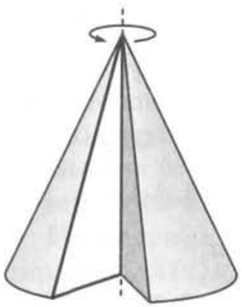


Рис. 22

Рис. 23

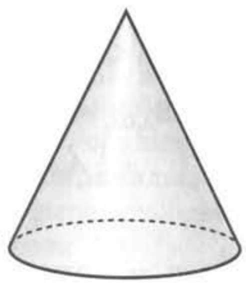


Рис. 24

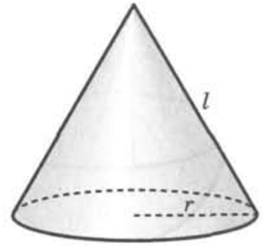


Рис. 25

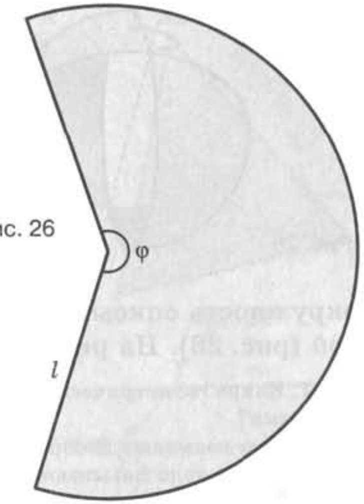


Рис. 26

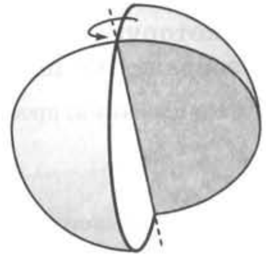


Рис. 27

Теорема 3. ***Площадь боковой поверхности конуса равна произведению полуокружности его основания и образующей.***

Доказательство. Пусть имеется конус, радиус основания которого равен r, а образующая — l (рис. 25). Развернем боковую поверхность конуса на плоскость, в результате получится сектор, радиус которого равен образующей l (рис. 26). Найдем центральный угол φ этого сектора, приняв во внимание, что ему соответствует дуга окружности, равная длине окружности основания конуса, т. е. равна $2\pi r$. Поскольку длина всей окружности, связанной с сектором, равна $2\pi l$ и этой длине соответствует полный угол, равный 360°, то

$$\varphi = \frac{360^\circ}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \frac{360^\circ \cdot r}{l}.$$

Теперь найдем площадь S сектора с радиусом l и углом φ:

$$S = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ \cdot r}{l} = \pi r \cdot l.$$

Поскольку выражение πr представляет длину полуокружности основания конуса, можем утверждать, что площадь боковой поверхности конуса равна произведению полуокружности его основания и образующей.

Шаром называется тело, полученное вращением круга вокруг своего диаметра (рис. 27). При этом вращении

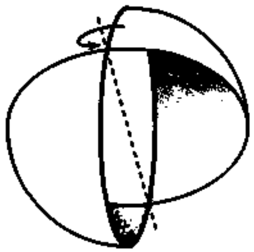


Рис. 28

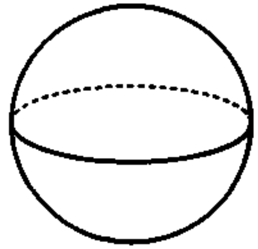


Рис. 29

окружность описывает поверхность, которую называют *сферой* (рис. 28). На рисунке 29 дано изображение шара.

?

1. Какие геометрические фигуры называются плоскими; пространственными?
2. Что называют изображением фигуры?
3. Какое тело называют многогранником?
4. Что называют гранями многогранника; ребрами многогранника; вершинами многогранника?
5. Какой многогранник называется призмой?
6. Что называют основаниями призмы; боковыми гранями призмы; боковыми ребрами призмы?
7. Какая призма называется прямой призмой; наклонной призмой?
8. Какая призма называется правильной призмой?
9. Какая призма называется параллелепипедом?
10. Какой прямой параллелепипед называется прямоугольным параллелепипедом?
11. Какие ребра прямоугольного параллелепипеда называются его измерениями?
12. Какой многогранник называется пирамидой?
13. Что называют основанием пирамиды; боковыми гранями пирамиды; вершиной пирамиды?
14. Какая пирамида называется правильной пирамидой?
15. Какой отрезок называется апофемой правильной пирамиды?
16. Сформулируйте свойство боковых ребер правильной пирамиды; боковых граней правильной пирамиды; апофем правильной пирамиды.
17. Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды?
18. Какое тело называется цилиндром?
19. Какое тело называется конусом?
20. Какое тело называется шаром?
21. Чему равна площадь боковой поверхности конуса?

1. Докажите, что боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

2. Скажите, какая — плоская или пространственная — ломаная изображена на рисунке:

а) 30; в) 32; д) 34;
б) 31; г) 33; е) 35.

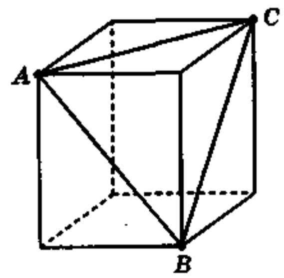


Рис. 30

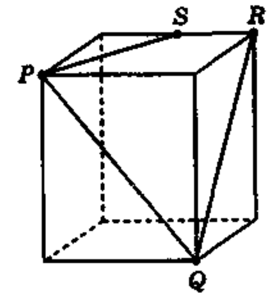


Рис. 31

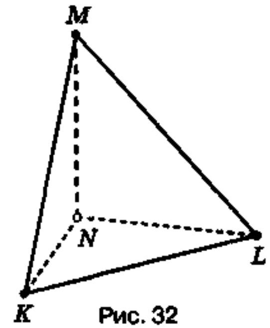


Рис. 32

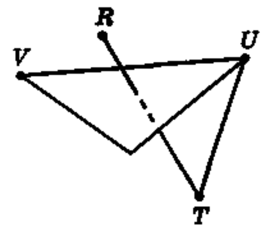


Рис. 33

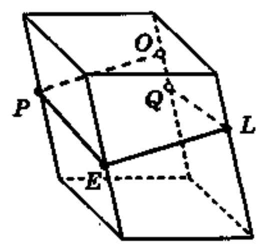


Рис. 34

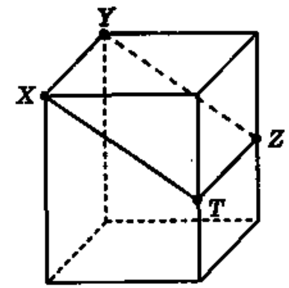


Рис. 35

3. Скажите, какая — плоская или пространственная — фигура изображена на рисунке:

а) 36; б) 37; в) 38.

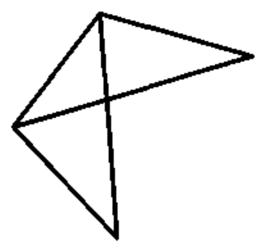


Рис. 36

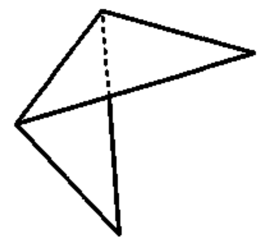


Рис. 37

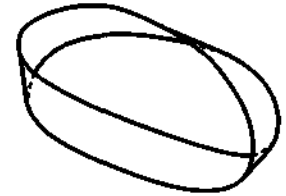


Рис. 38

4. Определите, является ли многогранником тело, изображенное на рисунке:

а) 39; в) 41; д) 43;
б) 40; г) 42; е) 44.

5. Используя рисунок 45, на котором изображен многогранник $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, назовите:

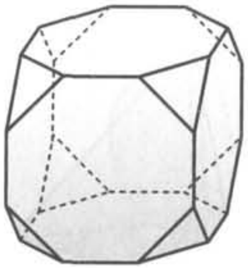


Рис. 39

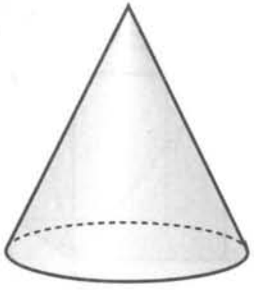


Рис. 40

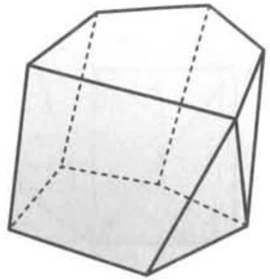


Рис. 41

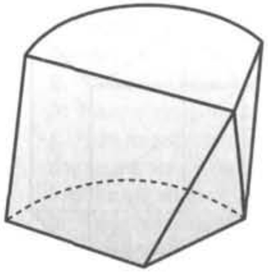


Рис. 42

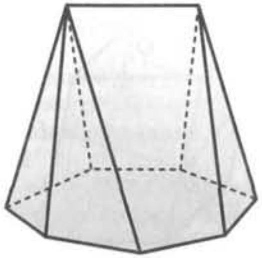


Рис. 43

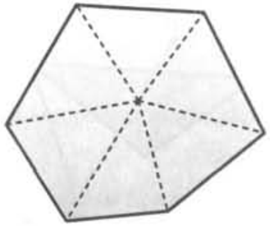


Рис. 44

а) грани с общим ребром CD;
б) грани с общим ребром DD_1;
в) грани с общей вершиной E;
г) грани с общей вершиной C_1;
д) ребра с общей вершиной A;
е) ребра с общей вершиной F_1.

6. На рисунке 46 изображена пятиугольная призма $UVWXYU_1V_1W_1X_1Y_1$ и ее диагональ UX_1. Назовите другие диагонали этого многогранника.

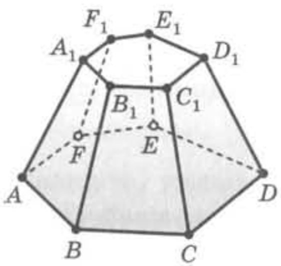


Рис. 45

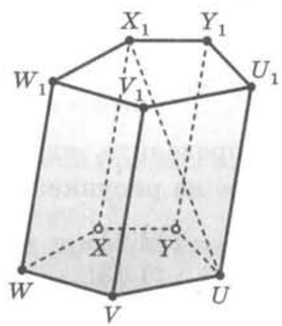


Рис. 46

7. На рисунке 47 изображена четырехугольная призма. Назовите:

а) основания призмы;
б) боковые грани с ребром EE_1;
в) грани с ребром DE.

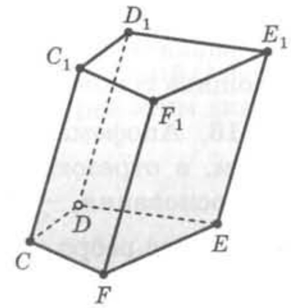


Рис. 47

8. Докажите, что боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра ее основания и бокового ребра.

9. Основанием прямого параллелепипеда с боковым ребром 8 м является ромб с диагоналями 10 м и 24 м. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

10. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а боковое ребро — 11 см. Найдите полную поверхность призмы.

11. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 30 мм и 50 мм и углом между ними в 120°, а наибольшая из площадей боковых граней равна 3500 мм^2. Найдите полную поверхность призмы.

12. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 15 см и высотой 12 см. Найдите боковую поверхность призмы, учитывая, что ее боковое ребро равно 20 см.

13. Сторона основания правильной n-угольной призмы равна a, а ее боковое ребро — h. Найдите боковую и полную поверхности призмы, учитывая, что:

а) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$;   в) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$;
б) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$;   г) $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$.

14. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $MABC$ равна 6 см, а отрезок, соединяющий вершину M пирамиды с центром O основания, — 8 см (рис. 48). Найдите:

а) боковые ребра пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

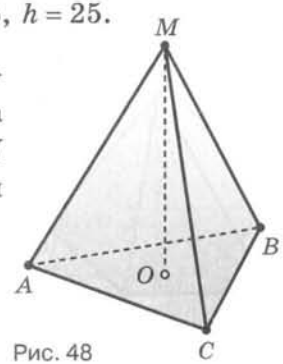


Рис. 48

15. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды равна 30 420 мм^2, а ее боковое ребро — 169 мм. Найдите площадь основания пирамиды.

16. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 15 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 12 см. Найдите:

а) боковое ребро и сторону основания пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

17. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 12 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 16 см. Найдите:

а) боковое ребро и апофему пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

18. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна 240 см^2, а ее боковое ребро — 12 см. Найдите площадь основания пирамиды.

19. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 30 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 24 см. Найдите:

а) боковое ребро и сторону основания пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

20. Докажите, что количество вершин любой призмы — число четное, а количество ее ребер — число, кратное трем.

21. Основанием пирамиды $QABCD$ является ромб $ABCD$ со стороной, равной 10 см, одна из диагоналей которого равна 16 см. Отрезок, соединяющий вершину Q пирамиды с точкой O пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 14 см (рис. 49). Найдите:

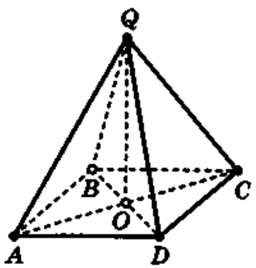


Рис. 49

а) боковые ребра пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

22. Основанием пирамиды $REFGH$ является параллелограмм $EFGH$ со сторонами 10 см и 18 см и площадью 90 см^2. Отрезок, соединяющий вершину R пирамиды с точкой O пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 6 см. Найдите:

а) боковые ребра пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

23. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 8 м и 10 м, и меньшей диагональю 6 м. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 4 м. Найдите:

а) боковые ребра пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

24. Основанием пирамиды $PMNUV$ является квадрат $MNUV$ (рис. 50). Боковое ребро PN перпендикулярно каждой прямой плоскости основания, проходящей через точку N, углы M и U граней PMV и PUV прямые, а углы M и U граней PMN и PUN равны 45° каждый. Наибольшее боковое ребро равно 24 см. Найдите:

а) другие боковые ребра пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

25. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — $\sqrt{69}$ см. Найдите:

а) боковое ребро и апофему пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

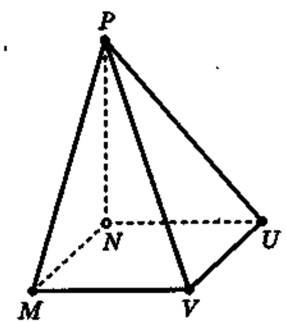


Рис. 50

26. Боковая поверхность правильной шестиугольной пирамиды равна 150 см^2, а ее боковое ребро — 10 см. Найдите площадь основания пирамиды.

27. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 20 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 24 см. Найдите:

а) боковое ребро и сторону основания пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

28. Основанием пирамиды является ромб со стороной 15 см и меньшей диагональю 18 см. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей, перпендикулярен им и равен 12 см. Найдите высоты граней пирамиды.

29. Докажите, что боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности его основания и образующей.

30. Найдите боковую поверхность цилиндра, радиус основания и образующая которого соответственно равны:

а) 7 см и 12 см; в) 1 м и 12 дм;
б) 12 см и 7 см; г) 0,7 м и 1,2 м.

31. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 300π см^2, а образующая — 6 см. Найдите площадь основания цилиндра.

32. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 90π м^2, а образующая — 5 м. Найдите полную поверхность цилиндра.

33. Диаметр основания цилиндра равен 1 м, его образующая равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

34. Образующая цилиндра на 12 см больше радиуса его основания, а полная поверхность равна 128π см^2. Найдите радиус основания и образующую цилиндра.

35. Определите, сколько понадобится краски, чтобы покрасить с двух сторон бак цилиндрической формы (рис. 51) высотой 2,5 м с диаметром основания 1,2 м, учитывая, что слой краски имеет толщину 0,1 мм.

36. Определите, сколько листовой жести понадобится на изготовление трубы (рис. 52) длиной 6 м и диаметром 25 см, учитывая, что на швы расходуется 2,5 % площади боковой поверхности трубы.

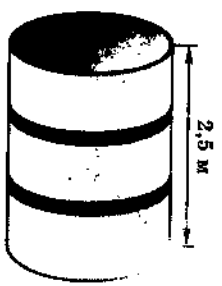


Рис. 51

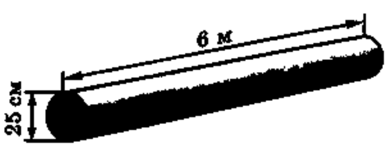


Рис. 52

37. Из квадрата, диагональ которого равна d, образована цилиндрическая поверхность. Найдите площадь основания соответствующего цилиндра.

38. Один цилиндр образован вращением прямоугольника с измерениями a и b вокруг стороны длиной a, второй — вращением вокруг стороны длиной b. Докажите, что боковые поверхности этих цилиндров равны, и определите отношение их полных поверхностей.

39. Отрезок, соединяющий вершину конуса с центром его основания, равен 35 мм, а радиус его основания — 12 мм. Найдите образующую конуса.

40. Отрезок, соединяющий вершину конуса с центром его основания, равен 63 см, а диаметр его основания — 32 см. Найдите боковую поверхность конуса.

41. Образующая конуса равна l и образует с радиусом основания угол α (рис. 53). Найдите площадь основания конуса, учитывая, что:

а) $l = 10$ см, $\alpha = 30°$;
б) $l = 24$ дм, $\alpha = 45°$;
в) $l = 5$ м, $\alpha = 60°$.

42. Образующая конуса равна l и образует с радиусом основания угол α. Найдите полную поверхность конуса, учитывая, что:

а) $l = 18$ см, $\alpha = 30°$;
б) $l = 20$ дм, $\alpha = 45°$;
г) $l = 2{,}4$ м, $\alpha = 60°$.

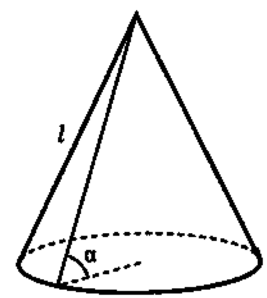


Рис. 53

43. Найдите угол развертки боковой поверхности конуса, образующая которого равна 5 м, а диаметр основания — 6 м.

44. Найдите длину дуги сектора развертки боковой поверхности конуса, учитывая, что образующая конуса равна 12 см и образует с радиусом его основания угол в 60°.

45. Найдите радиус основания и длину отрезка, соединяющего вершину конуса с центром его основания, учитывая, что разверткой его боковой поверхности является сектор, радиус которого равен 36 см, а центральный угол — 120°.

46. Найдите боковую поверхность конуса, радиус основания и образующая которого соответственно равны:

а) 11 см и 8 см;
б) 8 см и 11 см;
в) 3 м и 18 дм;
г) 2,7 м и 1,2 м.

47. Площадь боковой поверхности конуса равна 540π см^2, а образующая — 9 дм. Найдите площадь основания конуса.

48. Площадь боковой поверхности конуса равна 80π м^2, а образующая — 10 м. Найдите полную поверхность конуса.

49. Диаметр основания конуса равен 10 м, его образующая равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

50. Образующая конуса на 24 см больше радиуса его основания, а полная поверхность равна 576π см^2. Найдите радиус основания и образующую конуса.

51. Один конус образован вращением прямоугольного треугольника с катетами a и b вокруг катета длиной a, другой — вращением вокруг катета длиной b. Докажите, что боковые поверхности этих конусов равны, и определите отношение их полных поверхностей.

---

52. Диагонали прямоугольника пересекаются под углом 60°. Какие углы образует диагональ прямоугольника с его сторонами?

53. Диагонали ромба относятся как 3 : 4, а его периметр равен 60. Найдите площадь ромба.

54. В квадрат вписан круг, а в круг — правильный шестиугольник. Найдите отношение площадей этих фигур.

55. В окружность с радиусом 65 вписан прямоугольник, одна сторона которого больше другой в 2,4 раза. Найдите площадь прямоугольника.

56. Решите неравенство:

а) $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1$;
б) $\frac{5x-2}{8} - \frac{3x-1}{4} \geqslant -\frac{2}{3}$;

в) $\frac{7x+1}{9} - \frac{4x-5}{5} < 1$;
г) $\frac{5x-1}{4} - \frac{8x-3}{5} \leqslant -\frac{3}{2}$.

57. Решите неравенство:

а) $x^2 - 2x - 3 < 0$;
б) $2x^2 - 5x - 3 > 0$;
в) $2x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$;
г) $x^2 + 12x + 36 \leqslant 0$.

58. Решите неравенство:

а) $\frac{6x-5}{4x+1} < 0$;
б) $\frac{3-0,5x}{2-4x} > 0$;
в) $\frac{4x+3}{2x-1} \geqslant 1$;
г) $\frac{3-4x}{3x+5} \leqslant -1$.

59. Автомобиль ехал сначала со скоростью 63 км/ч, а затем увеличил ее и с большей скоростью проехал 54 км. Найдите большую скорость движения автомобиля, учитывая, что на весь путь было затрачено 3 ч, а средняя скорость на всем пути оказалась равной 67 км/ч.

60. Есть две коробки для укладывания конфет, в одну помещается всего 54 конфеты, в другую — по 4 конфеты в одном ряду, а всего в обеих коробках — 10 рядов. Найдите количество рядов во второй коробке, учитывая, что все конфеты из обеих коробок полностью заполняют третью коробку, в которой рядов столько, сколько их вместе в первой и второй коробках, и в один ряд помещается 7 конфет.

61. На отрезке AB длиной 40 см выбрана точка K, и на отрезках-частях KA и KB построены прямоугольники $KACD$ и $KBFE$, в первом из которых сторона AC равна 40 см, а площадь второго — 360 см^2 (рис. 54). Найдите измерения прямоугольника $KBFE$, учитывая, что когда на отрезке AB построили третий прямоугольник $ABGH$ с площадью, равной сумме площадей прямоугольников $KACD$ и $KBFE$, то его второе измерение оказалось равным 34 см.

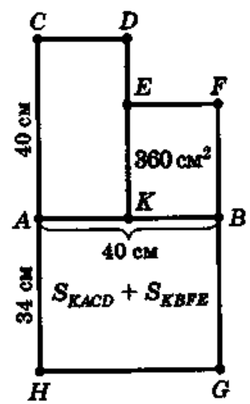


Рис. 54

* * *

62. Сколько общих точек могут иметь контуры двух четырехугольников?

63. Расстояние от центра описанной около треугольника ABC окружности до стороны AB равно d. На стороне BC выбрана такая точка D, что $BD = 0{,}5\ AB$. Найдите CD, учитывая, что $\angle B = 60°$.

64. Найдите сумму

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\ddots+\cfrac{1}{2007}}}}}} + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{2007}}}}.$$

2. Прямые и плоскости

Наши пространственные представления подсказывают, что прямые и плоскости в пространстве могут располагаться по-разному.

Две прямые плоскости могут иметь только одну общую точку, такие прямые называются *пересекающимися*. На рисунке 55 показаны пересекающиеся прямые a и b и их единственная общая точка T. Две прямые плоскости могут не иметь общих точек. Тогда их называют *параллельными*. На рисунке 56 показаны параллельные прямые c и d. В пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т. е. нет такой плоскости, которой бы они обе принадлежали. Такие прямые называются *скрещивающимися*. Представление о таких прямых дают две дороги, из которых одна проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (рис. 57). Такими являются прямые, на которых расположены ребра MN и L_1M_1 параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 58).

Каким может быть взаимное расположение прямой и плоскости?

Прямая может лежать в плоскости (рис. 59). Если прямая не лежит в плоскости, то она может пересекать ее в некоторой точке (рис. 60) или не иметь с плоскостью ни одной общей точки (рис. 61). В последнем случае прямая и плоскость называются *параллельными*. Представление о прямой, лежащей в плоскости, дает карандаш, лежащий на листе бумаги (рис. 62), о пересекающихся прямой и плоскости — стрела, выпущенная из лука и попавшая в плоскую мишень (рис. 63), о прямой, не пересекающей плоскость, — пол в спортивном зале и гимнастическое бревно (рис. 64). Указанные виды взаимного расположения прямой и плоскости можно проследить и на изображении параллелепипеда (рис. 65). Прямая, которой принадлежит диагональ AE грани $ACEG$, лежит в плоскости этой грани. Прямая, проходящая через ребро AA_1, пересекает плоскость грани $ACEG$. Прямая, содержащая ребро A_1C_1, параллельна плоскости грани $ACEG$.

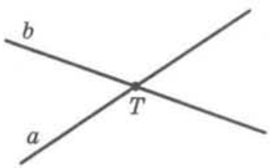


Рис. 55

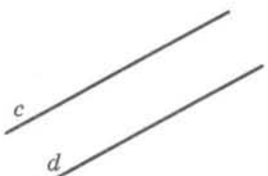


Рис. 56

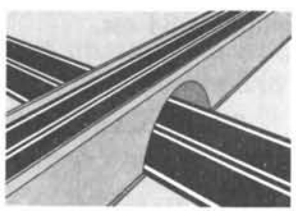


Рис. 57

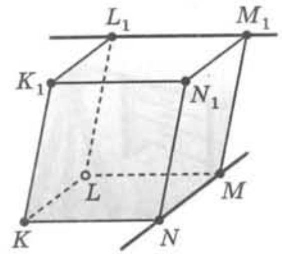


Рис. 58

Рис. 59

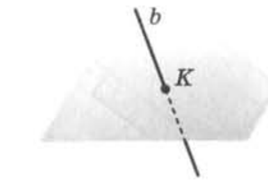


Рис. 60

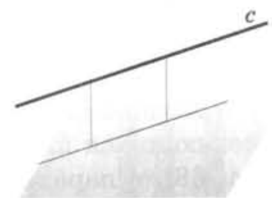


Рис. 61

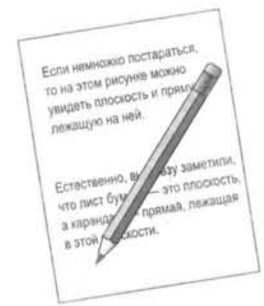


Рис. 62

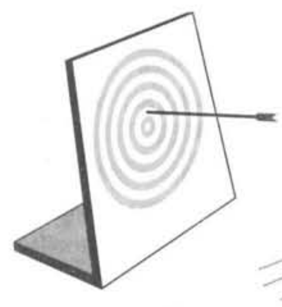


Рис. 63

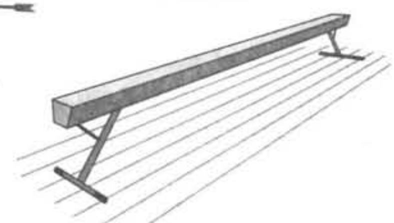


Рис. 64

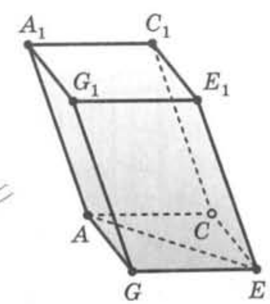


Рис. 65

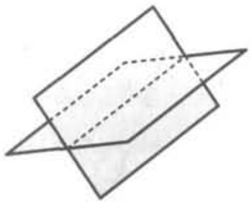


Рис. 66

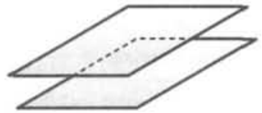


Рис. 67

Рис. 68

Как могут располагаться в пространстве две плоскости?

Плоскости могут пересекаться по прямой (рис. 66) или не иметь общих точек (рис. 67). В соответствии с этим их называют *пересекающимися* или *параллельными*. Представление о пересекающихся плоскостях дают крышка стола и его боковина (рис. 68), о параллельных плоскостях — пол и потолок в помещении (рис. 69). На изображении параллелепипеда на рисунке 65 пересекающимися являются плоскости граней AGG_1A_1 и $AGEC$, параллельными — плоскости граней AGG_1A_1 и CEE_1C_1.

Знак $\parallel$ используют не только для обозначения параллельности прямых, но и параллельности прямой и плоскости, и двух плоскостей. Если учесть, что прямые обозначаются малыми латинскими буквами a, b, c, ..., а плоскости — малыми греческими буквами α, β, γ, ..., то записи $a \parallel b$, $c \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$ означают, что являются параллельными прямые a и b, прямая c и плоскость α, плоскости α и β.

Теория взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве основывается на следующих аксиомах.

Аксиома 1. ***Если три точки не лежат на одной прямой, то через них проходит единственная плоскость.***

Аксиома 2. ***Если две точки прямой лежат в плоскости, то каждая точка этой прямой принадлежит плоскости.*** В этом случае говорят, что прямая лежит в плоскости.

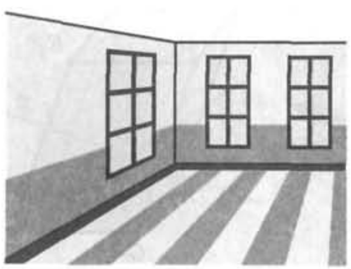


Рис. 69

Аксиома 3. ***Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и общую прямую, проходящую через эту точку.***

Свойство плоскости, которую фиксирует аксиома **1**, часто используется на практике. Острия ножек штатива фотоаппарата (рис. 70) принадлежат одной плоскости, и поэто-

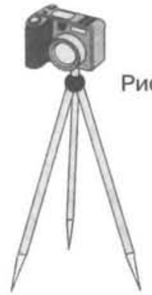


Рис. 70

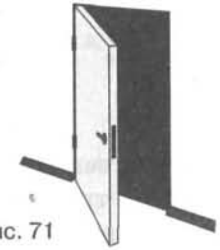


Рис. 71

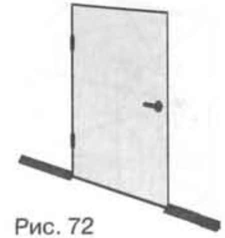


Рис. 72

му положение фотоаппарата устойчивое. Двери, закрепленные на двух петлях, не занимают определенного положения (рис. 71), но если добавить третью точку крепления — замок, то положение дверей фиксируется (рис. 72). Когда ножки табурета подрезаны неправильно, то табурет стоит на трех ножках, а четвертая ножка висит над полом (рис. 73).

Рис. 73

Свойство плоскости, которое выражает аксиома **2**, используют для проверки прямолинейности чертежной линейки. Линейку прикладывают краем к поверхности стола: если край прямолинейный, то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола (рис. 74), а если неровный, то между краем линейки и поверхностью стола есть щель (рис. 75 и 76).

Свойство плоскости, зафиксированное аксиомой **3**, проявляется при пересечении смежных стен комнаты (рис. 77).

Отметим, что в стереометрии остаются истинными все аксиомы планиметрии и все доказанные в ней утверждения. В частности, признаки равенства и признаки подобия треугольников остаются в силе и для треугольников, лежащих в разных плоскостях.

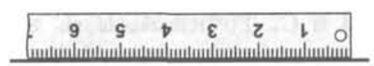


Рис. 74

Рис.75

Рис. 76

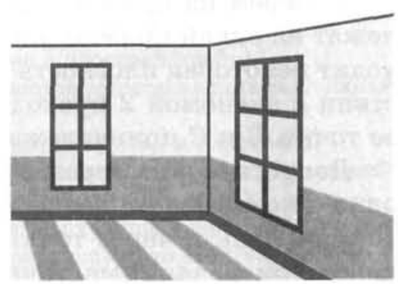


Рис. 77

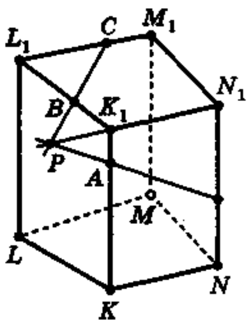


Рис. 78

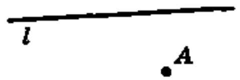


Рис. 79

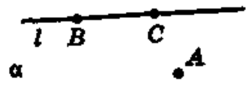


Рис. 80

В соответствии с аксиомой 1 плоскость определяется тремя своими точками A, B, C, поэтому иногда плоскость обозначают тремя большими латинскими буквами: плоскость, проходящую через точки A, B, C, обозначают ABC.

Пример. В призме $KLMNK_1L_1M_1N_1$ на ребрах KK_1, K_1L_1, L_1M_1 выбраны точки A, B, C, причем прямая, определенная точками B и C, не параллельна ребру K_1N_1 (рис. 78). Плоскости ABC и KNN_1 имеют общую точку A. В соответствии с аксиомой 3 они имеют общую прямую. Построим ее.

Точка A принадлежит грани KK_1N_1N, а точки B, C — грани $K_1L_1M_1N_1$, и эти грани пересекаются по прямой K_1N_1. Эта прямая и прямая BC лежат в одной плоскости и не параллельны. Поэтому они пересекаются в некоторой точке. Найдем ее, продлив отрезки BC и K_1N_1 — получаем точку P.

Точка P принадлежит прямым BC и K_1N_1, значит, она принадлежит как плоскости ABC, так и плоскости KNN_1. Этим же плоскостям принадлежит и точка A. Значит, прямая, определенная точками P и A, принадлежит и плоскости ABC, и плоскости KNN_1. Иными словами, плоскости ABC и KNN_1 пересекаются по прямой PA.

Теорема 4. ***Через прямую и точку вне ее проходит единственная плоскость.***

Доказательство. Пусть есть прямая l и точка A, которая не принадлежит прямой l (рис. 79).

Выберем на прямой l две точки B и C. Точки A, B, C не лежат на одной прямой, поэтому через них по аксиоме 1 проходит некоторая плоскость α (рис. 80). Плоскость α в соответствии с аксиомой 2 проходит и через прямую l, так как две ее точки B и C принадлежат плоскости α.

Допустим, что через прямую l и точку A проходит еще одна плоскость β. Тогда плоскость β проходит как через точку A, так и через точки B и C. Поскольку по аксиоме 1 через три различные точки проходит единственная плоскость, то плоскость β совпадает с плоскостью α. Значит,

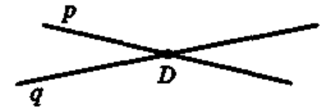


Рис. 81

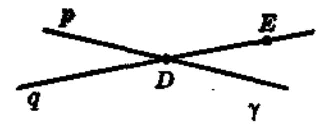


Рис. 82

через прямую l и точку A вне ее проходит единственная плоскость.

Теорема 5. ***Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.***

Доказательство. Пусть имеются две пересекающиеся прямые p и q, и D — их общая точка (рис. 81).

Выберем на прямой q какую-либо точку E, отличную от точки D (рис. 82). В соответствии с теоремой 4 через прямую p и точку E проходит единственная плоскость γ. Плоскость γ проходит и через прямую q, так как две точки D и E прямой q принадлежат плоскости γ.

Допустим, что через прямые p и q проходит еще одна плоскость δ. Тогда плоскость δ проходит через точку E. Но через эту точку и прямую p, в соответствии с теоремой 4, проходит единственная плоскость. Значит, плоскость δ совпадает с плоскостью γ. Таким образом, через пересекающиеся прямые p и q проходит единственная плоскость.

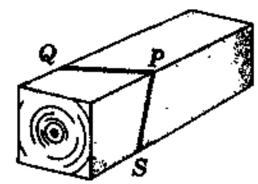


Рис. 83

Теорема 5 находит свое применение на практике. Если столяру нужно распилить брусок под определенным углом, он, чтобы наметить плоскость распила, проводит в двух смежных гранях бруска пересекающиеся прямые PQ и PS (рис. 83).

?

1. Какие две прямые плоскости называются пересекающимися; параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися?
3. Как могут располагаться две прямые в пространстве?
4. Какие прямая и плоскость называются пересекающимися; параллельными?
5. Как могут располагаться в пространстве прямая и плоскость?
6. Какие две плоскости называются пересекающимися; параллельными?
7. Как могут располагаться в пространстве две плоскости?
8. Сформулируйте свойство плоскости, проходящей через три точки, и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
9. Сформулируйте свойство прямой, две точки которой принадлежат плоскости, и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.

10. Сформулируйте свойство линии пересечения двух плоскостей и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
11. Как обозначаются точки; прямые; плоскости?
12. Назовите способы задания плоскости.

65. Сколько общих точек могут иметь:

а) две прямые;
б) прямая и плоскость;
в) две плоскости?

66. Могут ли иметь единственную общую точку:

а) две прямые;
б) две плоскости;
в) прямая и плоскость;
г) три плоскости?

67. Четыре точки не принадлежат одной плоскости. Определите:

а) могут ли три из них принадлежать одной прямой;
б) сколько плоскостей можно провести через них.

68. Сколько образуется линий при попарном пересечении трех плоскостей?

69. Точки U и V являются точками треугольника ABC, а точка W принадлежит прямой UV (рис. 84). Принадлежит ли точка W плоскости ABC?

70. Докажите, что:

а) прямая a, пересекающая в различных точках две пересекающиеся прямые k и l, принадлежит плоскости этих прямых;
б) если некоторая точка A принадлежит прямой k, которая принадлежит плоскости α, то точка A принадлежит плоскости α;
в) если две точки A и B принадлежат как прямой l, так и плоскости α, то прямая l лежит в плоскости α;
в) если плоскости α и β пересекаются по прямой l и точка A принадлежит как плоскости α, так и плоскости β, то точка A принадлежит прямой l.

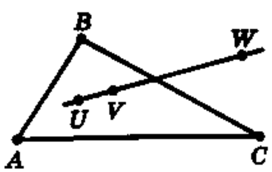


Рис. 84

71. На рисунке 85 изображен параллелепипед $NOPQDEFC$. Назовите:

а) прямые, пересекающиеся с прямой CD;
б) прямые, пересекающиеся с прямой FP;
в) прямые, параллельные прямой CD;

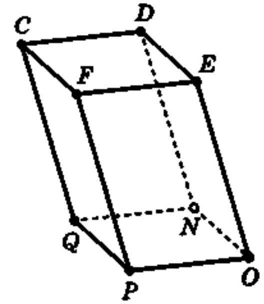


Рис. 85

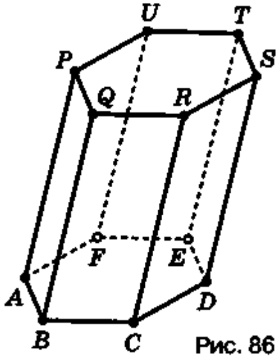


Рис. 86

г) прямые, параллельные прямой FP;
д) прямые, скрещивающиеся с прямой CD;
е) прямые, скрещивающиеся с прямой FP.

72. На рисунке 86 изображена призма $ABCDEFPQRSTU$, основания которой — правильные шестиугольники. Назовите:

а) прямые, пересекающиеся с плоскостью ABC;
б) прямые, пересекающиеся с плоскостью UTF;
в) прямые, лежащие в плоскости PTR;
г) прямые, принадлежащие плоскости CDR;
д) прямые, параллельные плоскости FEC;
е) прямые, параллельные плоскости AQB.

73. На рисунке 85 изображен параллелепипед $NOPQDEFC$. Назовите:

а) плоскости, пересекающиеся с прямой CQ;
б) плоскости, пересекающиеся с прямой OP;
в) плоскости, в которых лежит прямая NO;
г) плоскости, которым принадлежит прямая DN;
д) плоскости, параллельные прямой CF;
е) плоскости, параллельные прямой EO.

74. На рисунке 86 изображена призма $ABCDEFPQRSTU$, основания которой — правильные шестиугольники. Назовите:

а) плоскости, пересекающиеся плоскостью UQR;
б) плоскости, пересекающиеся с прямой FT;
в) плоскости, параллельные плоскости ACE;
г) плоскости, параллельные плоскости ETS.

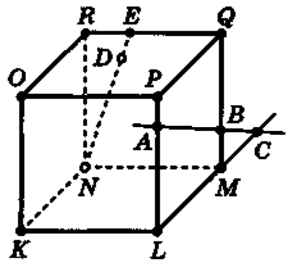


Рис. 87

75. Используя рисунок 87, назовите:

а) точки, лежащие в плоскостях LMQ и NME;
б) плоскости, в которых лежит прямая NR;
в) точку пересечения прямой BC с плоскостью KLN;
г) точки пересечения прямых PL и ND с плоскостью OPR;
д) прямую, по которой пересекаются плоскости KON и KLM;
е) прямую, по которой пересекаются плоскости RDQ и MNK;
ж) точку пересечения прямых AB и LM;
з) точку пересечения прямых RQ и BD;
и) точку пересечения прямых BQ и MC.

76. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Могут ли:

а) какие-либо три из них лежать на одной прямой;
б) прямые AB и CD пересекаться?

77. Докажите, что через три данные точки, лежащие на одной прямой, проходит плоскость. Сколько есть таких плоскостей?

78. Докажите, что если две смежные вершины четырехугольника и точка пересечения его диагоналей принадлежат некоторой плоскости, то четырехугольник целиком лежит в этой плоскости.

79. Истинно ли утверждение:

а) прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две его стороны во внутренних точках;
б) прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две его стороны?

80. Могут ли две плоскости иметь:

а) только одну общую точку;
б) только две общие точки;
в) только одну общую прямую;
г) только две общие прямые?

81. Докажите, что любая прямая, которая:

а) проходит через вершину A треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямую CD, принадлежит плоскости ACD;
б) не проходит через вершину B треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает как прямую BC, так и прямую BD, принадлежит плоскости BCD.

82. Плоскость β проходит через две смежные вершины трапеции и точку пересечения ее диагоналей. Докажите, что две другие вершины трапеции лежат в плоскости β.

83. Есть три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Докажите, что все прямые, которые:

а) проходят через точку A и пересекают прямую BC, лежат в одной плоскости;
б) не проходят через точку A и пересекают обе прямые AB и AC, лежат в одной плоскости.

84. Можно ли утверждать, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она:

а) проходит через вершину треугольника;
б) пересекает две стороны треугольника;
в) пересекает в различных точках две стороны треугольника;
г) пересекает две прямые, на которых лежат стороны треугольника;
д) пересекает три прямые, на которых лежат стороны треугольника?

85. Есть прямая a и точка K, не принадлежащая ей. Докажите, что все прямые, проходящие через точку K и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

86. Верно ли, что:

а) через любые две точки проходит единственная прямая;
б) через любые три точки проходит единственная плоскость;
в) через любые прямую и точку проходит единственная плоскость;
г) три пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости;
д) через любые две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость?

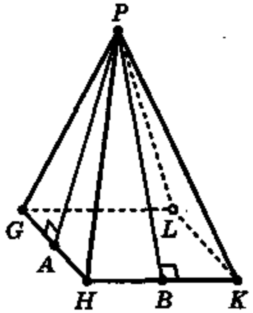


Рис. 88

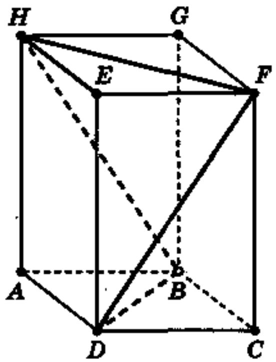


Рис. 89

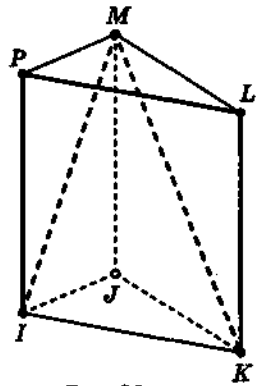


Рис. 90

87. Четырехугольная пирамида $PGHKL$ на рисунке 88 — правильная, а PA и PB — высоты ее граней PGH и PHK. Докажите, что треугольники PGA и PHB равны.

88. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 12 см². Найдите диагональ боковой грани, учитывая, что диагональ основания равна $\sqrt{2}$ см.

89. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDHGFE$ является квадрат $ABCD$ со стороной 6 см, а боковое ребро AH параллелепипеда равно 8 см (рис. 89). Найдите длину пространственной ломаной $HFDBH$.

90. Ребро основания правильной треугольной призмы $IJKPML$ (рис. 90) относится к боковому ребру как $2:3$. Найдите боковую поверхность призмы, учитывая, что длина ломаной $IPLKMI$ равна $16+4\sqrt{13}$ дм.

91. Точки A и B делят ребра QD и QE правильной четырехугольной пирамиды $QCDEF$ со всеми равными ребрами в отношении $5:7$, если считать от вершины Q. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что длина ломаной $ABQFA$ равна 70 см.

92. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с квадратным основанием равна 2640 мм². Найдите ребра параллелепипеда, учитывая, что радиус окружности, вписанной в треугольник NKK_1, равен 5 мм.

93. Диагональ боковой грани прямоугольного параллелепипеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ с квадратным основанием равна 52 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник CC_1D, равен 8 см. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

94. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 8 см, а ее боковая поверхность — $16\sqrt{15}$ см². Найдите сторону основания пирамиды, учитывая, что радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен $2\sqrt{0,6}$ см.

95. Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник, радиусы окружностей, вписанной в него и описанной около него, соответственно равны 4 см и 10 см. Найдите поверхность призмы, учитывая, что ее боковое ребро равно 16 см.

96. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, в которую можно вписать окружность. Боковая сторона трапеции равна 12 см и образует с основанием угол в 30°. Найдите боковое ребро призмы, учитывая, что ее полная поверхность равна 336 см².

97. Точки M и N принадлежат ребрам SS_1 и RR_1 призмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$. Докажите, что прямая MN принадлежит плоскости RSS_1.

98. Прямая a лежит в одной из пересекающихся плоскостей β и пересекает другую плоскость γ. Докажите, что прямая a пересекает линию пересечения плоскостей β и γ.

99. Точки P, Q и R принадлежат соответственно ребрам SA, SC и BC пирамиды $SABCD$ (рис. 91). Постройте прямую, по которой плоскость PQR пересекает плоскость:

а) SBC; б) SAB; в) ABC; г) SBD; д) SDC.

100. Используя рисунок 92, на котором точки B и C принадлежат ребрам PK и PT треугольной пирамиды $KPTU$, а точка A лежит на прямой, проходящей через ребро KU:

а) назовите прямые, которым принадлежит точка A;
б) назовите прямые, которым принадлежит точка U;
в) докажите, что прямая AB лежит в плоскости KPU;

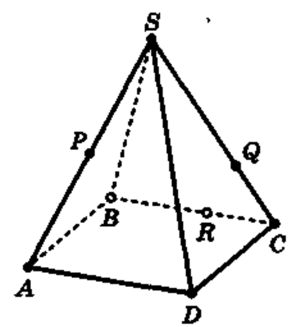


Рис. 91

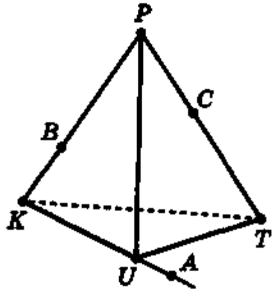


Рис. 92

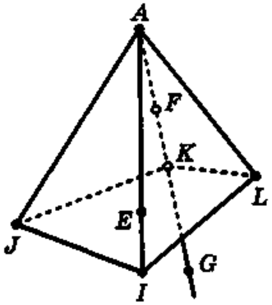


Рис. 93

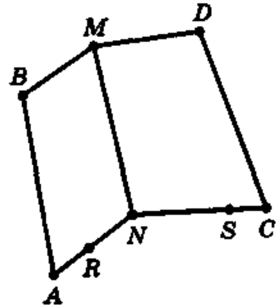


Рис. 94

г) установите, какой грани пирамиды принадлежит прямая BC;
д) установите, какой грани пирамиды принадлежит прямая KT;
е) назовите прямые, через которые проходит плоскость KPT.

101. Точка M — внутренняя точка ребра AJ треугольной пирамиды $AIJK$, точка N лежит на луче AK за точкой K. Постройте:

а) точку пересечения прямой MN с плоскостью IJK;
б) прямую, по которой пересекаются плоскости IMN и IJK.

102. Используя рисунок 93, на котором E — точка ребра AI четырехугольной пирамиды $AIJKL$, точка F принадлежит ребру AK, а точка G лежит на луче AK за точкой K:

а) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости IAJ и JAK;
б) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости AJG и KAL;
в) докажите, что прямая EF лежит в плоскости IAK;
г) докажите, что прямые EF и FG лежат в одной плоскости;
д) назовите плоскости, которым принадлежит прямая JL.

103. Точки A и B — середины ребер TZ и YZ пирамиды $RTXYZ$. Постройте:

а) точку пересечения прямой AB и плоскости RXY;
б) прямую, по которой пересекаются плоскости RAB и RXY.

104. На отрезке MN как на стороне в разных плоскостях построены два четырехугольника $MNAB$ и $MNCD$, на отрезках NA и NC выбраны внутренние точки R и S (рис. 94). Сделайте такой рисунок в тетради и:

а) постройте точку, в которой прямая MR пересекает плоскость ABC;
б) постройте точку пересечения прямой CD с плоскостью ARS;
в) докажите, что прямая RS принадлежит плоскости CAN.

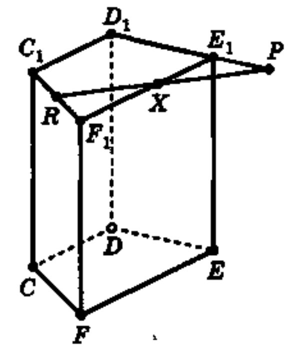


Рис. 95

105. На рисунке 95 изображена четырехугольная призма $CDEFC_1D_1E_1F_1$, точка P выбрана на луче D_1E_1 за точкой E_1, а точка R — на ребре C_1F_1. Используя этот рисунок:

а) докажите, что прямая PR принадлежит плоскости $C_1D_1F_1$;
б) докажите, что прямая PR пересекает прямую E_1F_1;
в) назовите прямую, по которой плоскость $C_1D_1F_1$ пересекает плоскость DD_1E;
г) назовите прямую, по которой плоскость $C_1D_1F_1$ пересекает плоскость PRF;
д) назовите точку, в которой прямая PR пересекает плоскость DEE_1;
е) назовите точку, в которой прямая PR пересекает плоскость FF_1E_1.

106. Точки A и B — внутренние точки ребер KM и KQ призмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$. Постройте:

а) точку, в которой прямая AB пересекает плоскость M_1MO;
б) прямую, по которой плоскость ABO_1 пересекает плоскость MOO_1.

107. Точки A, B, C являются серединами ребер T_1U_1, U_1V_1, V_1V параллелепипеда $TUVWT_1U_1V_1W_1$. Постройте:

а) точку, в которой прямая AB пересекает плоскость WW_1V_1;
б) прямую, по которой плоскость ABC пересекает плоскость WW_1V_1.

108. Диагонали KM и LN основания $KLMN$ пирамиды $AKLMN$ пересекаются в точке O, точка B — внутренняя точка отрезка KO, а точка C лежит на луче LN за точкой N. Постройте:

а) точку, в которой прямая BC пересекает плоскость ALM;
б) прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и ALM.

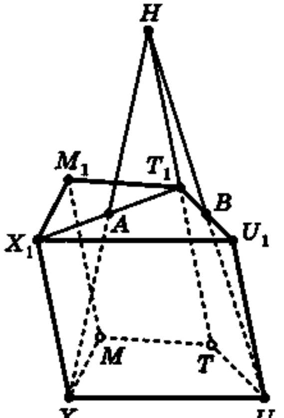


Рис. 96

109. Имеется призма $MTUXM_1T_1U_1X_1$. На луче TT_1 за точкой T_1 выбрана точка H, через которую проведены прямые HU и HX (рис. 96). Используя это:

а) докажите, что прямые HU и T_1U_1 пересекаются в некоторой точке B;
б) назовите точку, в которой прямая HU пересекает плоскость $M_1T_1X_1$;
в) докажите, что прямые HX и T_1X_1 пересекаются в некоторой точке A;
г) докажите, что прямая HX и плоскость $M_1T_1U_1$ пересекаются в точке A;
д) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости XHU и T_1TU;
е) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости XHU и MTX.

110. Имеется параллелепипед $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Постройте:

а) точку пересечения прямой EE_1 с линией пересечения плоскостей BC_1D и C_1CE;
б) линию пересечения плоскостей BC_1D и EDD_1.

111. Точки A и B лежат в гранях PQS и PRS треугольной пирамиды $PQRS$ (рис. 97). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку, в которой прямая AB пересекает:

а) плоскость QRS; б) плоскость PQR.

112. Медианы BB_1 и NN_1 грани BKN четырехугольной пирамиды $BKLMN$ пересекаются в точке G (рис. 98). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку, в которой прямая MG пересекает плоскость BLN.

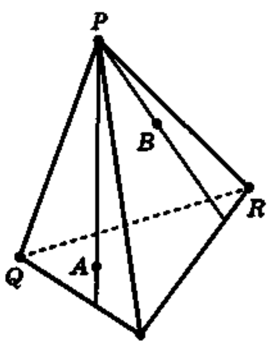


Рис. 97

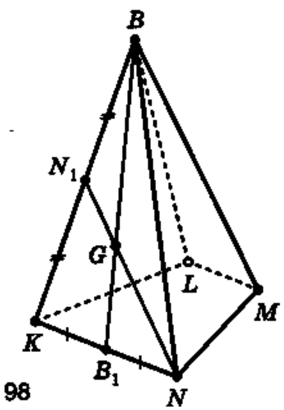


Рис. 98

113. Точку M выберите на диагонали DC_1 грани треугольной призмы $CDEC_1D_1E_1$, точку N — на отрезке E_1F, где F — внутренняя точка ребра DE, точку L — на луче DD_1 за точкой D_1 (рис. 99). Постройте прямую, по которой плоскость MNL пересекает плоскость ECC_1.

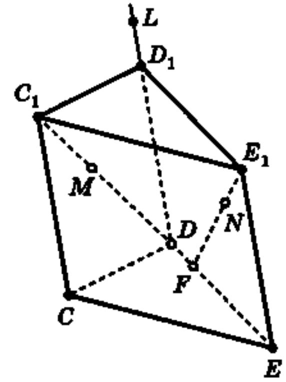


Рис. 99

114. Выберите точки A и B соответственно на ребрах MX и MY четырехугольной пирамиды $MXYZV$, а точку C — на луче YZ за точкой Z. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и XYZ.

---

115. В треугольнике со сторонами 4, 5, 6 проведены биссектриса среднего по величине угла и биссектриса угла, смежного с ним. Определите расстояние между основаниями этих биссектрис.

116. Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором биссектриса:

а) прямого угла делит гипотенузу на отрезки длинами m и n;
б) острого угла делит катет на отрезки длинами m и n, где $m > n$.

117. В равнобедренном треугольнике косинус угла при основании равен 0,28. Найдите высоты этого треугольника, учитывая, что его периметр равен 16 см.

118. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y + 2 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 14, \\ x + 2y - 5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + xy + 3 = 0, \\ 3x - y + 7 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{y-1} - \dfrac{y-x}{2x} = 2, \\ x - y + 4 = 0. \end{cases}$

119. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + 4 \cdot \dfrac{y}{x} = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{26}{5}, \\ xy = 6; \end{cases}$

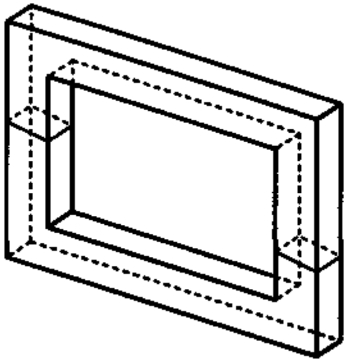


Рис. 103

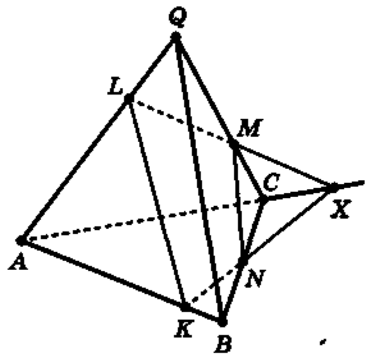


Рис. 104

семиугольником. Сечение «рамы» плоскостью на рисунке 103 состоит из двух четырехугольников.

Для построения сечения многогранника достаточно построить общие точки его граней и секущей плоскости.

Задача 1. Построим сечение треугольной пирамиды $QABC$ плоскостью α, проходящей через точки K, L, M ребер AB, AQ, CQ (рис. 104).

Секущая плоскость α имеет с гранью AQB две общие точки K и L, поэтому она пересекает эту грань по отрезку KL.

Также, поскольку точки L и M — общие точки секущей плоскости и грани AQC, то LM — линия пересечения этих плоскостей.

Грань ABC имеет с секущей плоскостью общую точку K. Найдем точку, в которой плоскость α пересекает ребро BC. Обратим внимание на то, что точка X пересечения прямых LM и AC принадлежит плоскости α, плоскости AQC и плоскости ABC. А поскольку точки K и X — общие точки плоскостей α и ABC, то KX — прямая, по которой плоскость α пересекает плоскость ABC. Точка N пересечения прямой KX с ребром BC принадлежит плоскости α. Значит, плоскость α пересекает грань ABC по отрезку KN, а грань BQC — по отрезку MN.

Четырехугольник $KLMN$ — искомое сечение пирамиды плоскостью α.

Прямые KL и KN называют *следами* плоскости α на плоскостях ABQ и ABC соответственно.

Задача 2. Построим сечение пирамиды $OKLMN$ плоскостью β, проходящей через точку A на ребре OL и прямую k в плоскости основания $KLMN$ (рис. 105).

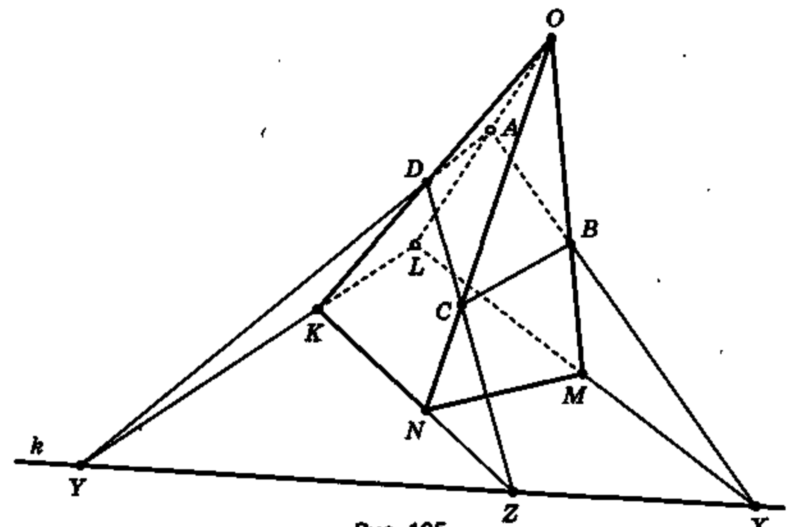


Рис. 105

Найдем точку X, в которой пересекаются прямые LM и k. Эта точка принадлежит и секущей плоскости β как точка прямой k, и плоскости грани LOM как точка прямой LM. Точка A также принадлежит этим обеим плоскостям. Поэтому плоскость β пересекает плоскость LOM по прямой AX, а грань LOM — по отрезку AB, где B – точка пересечения прямых AX и OM.

Так же найдем точки Y и D и отрезок AD, по которым плоскость β пересекает грань OLK, а затем точки Z и C и отрезки DC и BC. Четырехугольник $ABCD$ — искомое сечение.

Задача 3. Точки A, B, C — точки на разных ребрах четырехугольной призмы. Найдем сечение призмы плоскостью ABC.

Построение искомого сечения зависит от того, на каких ребрах призмы лежат точки A, B, C. Наиболее просто строить сечение в том случае, когда точки A, B, C лежат на ребрах, выходящих из одной вершины. Искомое сечение в этом случае — треугольник ABC (рис. 106).

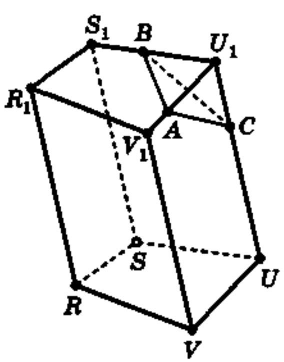


Рис. 106

Если точки A, B, C расположены так, как изображено на рисунке 107, то строить сечение сложнее. Здесь сначала построим след секущей плоскости ABC на плоскости нижнего основания. Для этого найдем точки M и N пере-

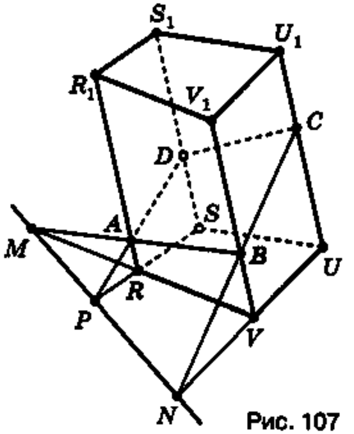


Рис. 107

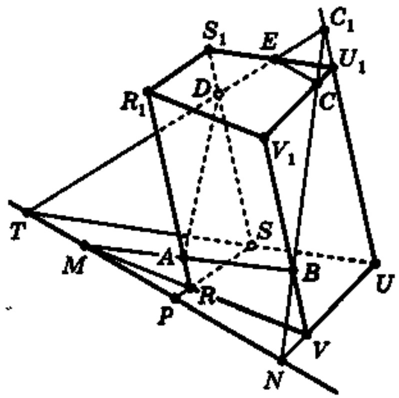


Рис. 108

сечения прямых AB и BC, которые лежат в секущей плоскости, с плоскостью $RSUV$: M — точка пересечения прямых AB и RV, N — точка пересечения прямых BC и UV. Прямая MN — общая прямая секущей плоскости и плоскости нижнего основания.

Точка P пересечения прямой RS со следом MN принадлежит и секущей плоскости, и плоскости грани RR_1S_1S. Учитывая, что этим двум плоскостям принадлежит и точка A, получаем, что прямая PA — след секущей плоскости на плоскости RR_1S_1S. Значит, плоскость ABC пересекает грань RR_1S_1S по отрезку AD, а грань UU_1S_1S — по отрезку CD. Искомым сечением является четырехугольник $ABCD$.

Видим, что новым элементом в этом решении по сравнению с задачей 2 является построение следа секущей плоскости на плоскости основания.

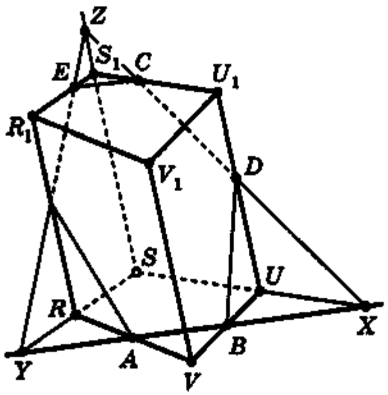


Рис. 109

На рисунке 108 показан случай, когда искомым сечением является пятиугольник. Здесь использована точка C_1 пересечения ребра UU_1 с секущей плоскостью. Следы секущей плоскости на боковых гранях пирамиды строятся так же, как и в предыдущем случае.

Рисунок 109 показывает, что искомым сечением четырехугольной призмы может быть и шестиугольник. След AB секущей плоскости на плоскости основания позволяет последовательно найти точки X и Y его пересечения с гранями SUU_1S_1 и RSS_1R_1, след XC секущей плоскости на плоскости SUU_1S_1, точку Z пересечения ребра SS_1 с секущей плоскостью и след ZY секущей плоскости на грани RSS_1R_1.

?

1. Какая фигура называется сечением многогранника? Какой фигурой может быть это сечение?
2. Какая прямая называется следом одной плоскости на другой?
3. Каким может быть сечение плоскостью четырехугольной призмы?

127. Точки A, B, C лежат на ребрах MM_1, M_1P_1, M_1T_1 призмы $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ (рис. 110). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC.

128. Изобразите куб $STRUS_1T_1R_1U_1$ и отметьте точки B и C на ребрах SU и RU. Постройте сечение куба плоскостью BCT_1.

129. Изобразите куб $MNOPM_1N_1O_1P_1$ и отметьте середины A, B и C ребер NM, NO и NN_1. Используя полученный рисунок:

а) постройте сечение куба плоскостью ABC;
б) докажите, что треугольник ABC правильный;
в) найдите площадь треугольника ABC, приняв ребро куба равным 1 м.

130. Изобразите куб $NORQN_1O_1R_1Q_1$ и отметьте середины A и B его ребер NQ и QR. Докажите, что сечение куба плоскостью ABQ_1 есть равнобедренный треугольник, и найдите ребро куба, учитывая, что периметр этого треугольника равен a.

131. Ребра UX, UZ, UU_1 прямоугольного параллелепипеда $UXYZU_1X_1Y_1Z_1$ соответственно равны 6 см, 6 см, 8 см. Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью XY_1Z есть равнобедренный треугольник, и найдите высоты этого треугольника.

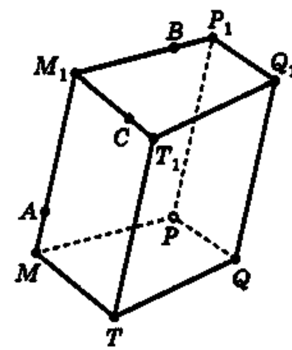


Рис. 110

132. Изобразите прямоугольный параллелепипед $TPQRT_1P_1Q_1R_1$ и постройте его сечение плоскостью, которая проходит через прямую T_1Q_1 и вершину R. Найдите площадь этого сечения, учитывая, что ребра RT и RQ равны друг другу и равны l, а радиус окружности, описанной около четырехугольника RQQ_1R_1, равен a.

133. Сторона основания правильной треугольной призмы $CDEC_1D_1E_1$ равна 12 см, а ее боковое ребро — 6 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, которой принадлежит сторона основания и противоположная вершина другого основания.

134. Ребро основания правильной треугольной пирамиды и ее боковое ребро соответственно равны k и l. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через две вершины основания и середину бокового ребра.

135. Изобразите куб $RSTVR_1S_1T_1V_1$ и отметьте середину C его ребра SS_1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую RT и точку C. Найдите медианы треугольника RTC, учитывая, что ребро куба равно 40 мм.

136. Изобразите куб $IJKLI_1J_1K_1L_1$ и постройте его сечение плоскостью IKJ_1. Найдите ребро куба, учитывая, что площадь этого сечения равна S.

137. Точки K и L выбраны на ребрах DA и DC призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а точка M — на луче BB_1 за точкой B_1 (рис. 111). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью KLM.

138. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ACEHA_1C_1E_1H_1$ плоскостью KLM, учитывая, что точки K, L, M лежат соответственно на лучах C_1A_1, EE_1, H_1H за точками A_1, E_1, H (рис. 112).

139. Изобразите призму $RSXYR_1S_1X_1Y_1$ и постройте ее сечение плоскостью, проходящей через середины A, B, C ребер RY, RR_1, YY_1.

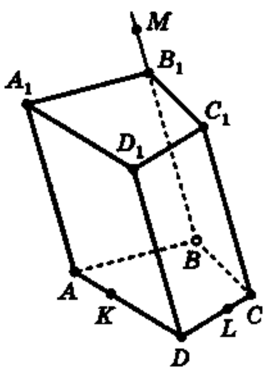


Рис. 111

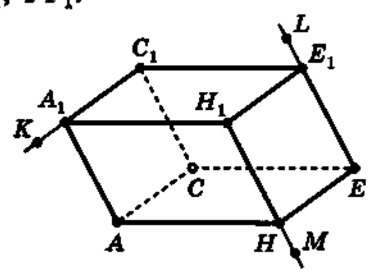


Рис. 112

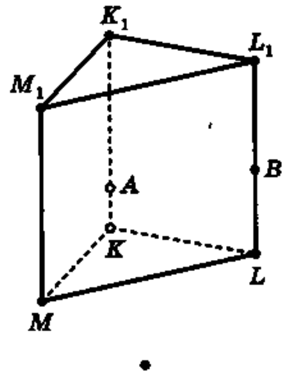


Рис. 113

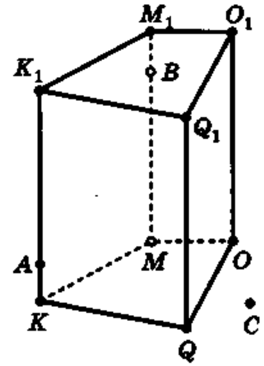


Рис. 114

140. Точки A и B лежат на ребрах KK_1 и LL_1 треугольной призмы $KLMK_1L_1M_1$, а точка C — на плоскости KLM (рис. 113). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC.

141. Точки A и B лежат соответственно на ребрах KK_1 и MM_1 призмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$, а точка C — на плоскости грани $KMOQ$ (рис. 114). Постройте сечение призмы плоскостью ABC.

142. Изобразите пирамиду $ABCD$ и постройте ее сечение плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AC, AD. Найдите площадь этого сечения, учитывая, что все ребра этой пирамиды равны l.

143. На рисунке 115 точки U, V, W выбраны на ребрах AB, BC, AD пирамиды $ABCD$. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью UVW.

144. Постройте сечение плоскостью ABC четырехугольной призмы $RSTVR_1S_1T_1V_1$, учитывая, что точки A, B, C выбраны на ребрах RS, RV, TT_1.

145. Постройте сечение треугольной пирамиды $MNOP$ плоскостью ABC, учитывая, что точки A, B, C выбраны на ребрах MN, OP, PN.

146. Точка C — середина ребра JL длиной a правильной треугольной пирамиды $IJKL$, боковая грань которой равна грани основания. Постройте сечение пирамиды

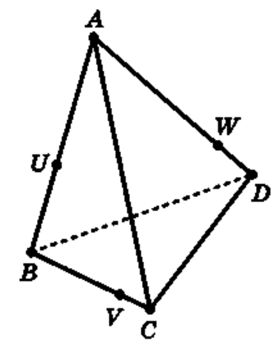


Рис. 115

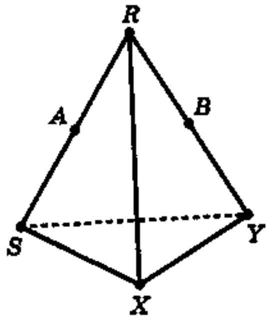


Рис. 116

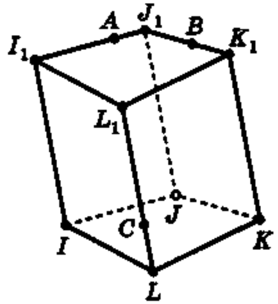


Рис. 117

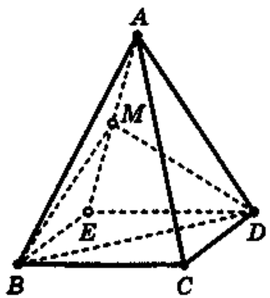


Рис. 118

плоскостью IKC и найдите радиусы окружности, вписанной в это сечение и описанной около него.

147. На рисунке 116 изображена правильная пирамида $RSXY$, у которой грань основания равна боковой грани. На ее ребрах RS и RY отмечены их середины A и B. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью ABX. Докажите, что треугольник ABX является равнобедренным и найдите его периметр и площадь, учитывая, что ребро пирамиды равно a.

148. На рисунке 117 изображена призма $IJKLI_1J_1K_1L_1$, на ребрах J_1I_1, J_1K_1, LL_1 выбраны точки A, B, C. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC.

149. Изобразите призму $MNOPM_1N_1O_1P_1$ и на ее ребрах NN_1, MP, OP выберите точки C, D, E. Постройте сечение призмы плоскостью CDE.

150. Есть правильная призма $XYZX_1Y_1Z_1$, все ребра которой равны друг другу. Найдите площадь сечения призмы плоскостью XY_1Z_1, учитывая, что полная поверхность призмы равна S.

151. Есть такая правильная треугольная призма, что плоскость, проходящая через сторону основания и противоположную вершину другого основания делит полную поверхность призмы в отношении $2:3$. Найдите эту поверхность, учитывая, что ребро основания равно a.

152. На рисунке 118 изображена правильная пирамида $ABCDE$ и на ребре AE отмечена его середина M. Треугольник

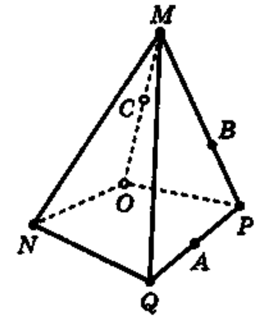


Рис. 119

BMD — сечение этой пирамиды плоскостью, которой принадлежат прямая BD и точка M. Найдите высоты треугольника BMD, учитывая, что все ребра пирамиды равны 20 мм.

153. Точка A — середина бокового ребра KE правильной четырехугольной пирамиды $KCDEF$, все ребра которой равны друг другу. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую DF и точку A. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что площадь этого сечения равна S.

154. Перенесите в тетрадь рисунок 119, на котором изображена четырехугольная пирамида $MNOPQ$ и отмечены точки A, B, C на ребрах PQ, PM, OM. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, B, C.

155. Изобразите четырехугольную пирамиду $STUVW$ и постройте ее сечение плоскостью, проходящей через точки A, B, C на ребрах ST, TW, VW.

156. Есть пирамида $RMNOP$, все ребра которой равны друг другу. Сечением этой пирамиды плоскостью, проходящей через вершину R и прямую NP, является треугольник RNP. Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая, что радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R.

157. Изобразите правильную пирамиду $TUVWX$ и постройте ее сечение плоскостью, проходящей через вершину T и прямую UW. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, учитывая, что площадь построенного сечения равна площади основания, а ребро основания равно l.

158. Пирамида V_1P_1QW имеет своими вершинами вершины куба $PQVWP_1Q_1V_1W_1$ (рис. 120). Найдите полную поверхность этой пирамиды, учитывая, что ребро куба равно 1 м.

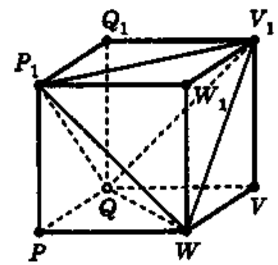


Рис. 120

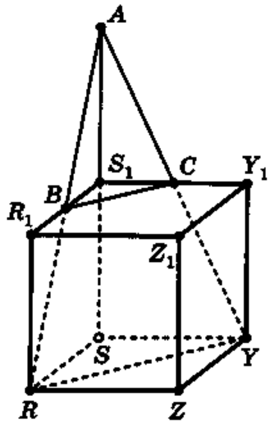


Рис. 121

159. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABTVA_1B_1T_1V_1$ плоскостью AB_1T. Найдите радиус окружности, описанной около боковой грани параллелепипеда, учитывая, что его основанием является квадрат со стороной a, а площадь построенного сечения равна S.

160. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $IJKLI_1J_1K_1L_1$ плоскостью, проходящей через вершину I и прямую J_1L_1. Найдите полную поверхность параллелепипеда, учитывая, что его основанием является квадрат со стороной a, а угол J_1IL_1 равен γ.

161. Четырехугольник $RBCY$ — сечение прямоугольного параллелепипеда $RSYZR_1S_1Y_1Z_1$ плоскостью, проходящей через прямую RY и точку A на луче SS_1 за точкой S_1 (рис. 121). Докажите, что это сечение есть равнобедренная трапеция и найдите ее площадь, учитывая, что основанием параллелепипеда является квадрат $RSYZ$ со стороной c, высота RR_1 параллелепипеда равна h, а вершина S_1 делит отрезок SA пополам.

162. Изобразите куб $KPTVK_1P_1T_1V_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через прямую K_1T и такую точку A луча V_1T_1, что вершина T_1 делит отрезок V_1A в отношении $2:1$, если считать от точки V_1. Найдите периметр этого сечения, учитывая, что ребро куба равно 2 м.

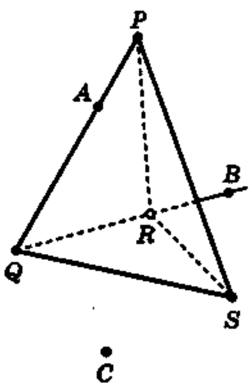


Рис. 122

163. Изобразите треугольную пирамиду $CDEF$ и постройте ее сечение плоскостью, проходящей через середины ребер FC, FD, FE. Найдите площадь грани пирамиды, учитывая, что все ее грани — равные друг другу правильные треугольники, а площадь сечения равна 120 см^2.

164. Точка A лежит на ребре PQ треугольной пирамиды $PQRS$, точка B — на луче QR за точкой R, а точка C — на плоскости QRS (рис. 122). Постройте сечение пирамиды плоскостью ABC.

165. Ребро основания правильной четырехугольной призмы равно a, а площадь сечения призмы плоскостью, которая проходит через концы ребер, выходящих из одной вершины, равна Q. Найдите боковую поверхность призмы.

166. Площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды $RUSVW$, ребра основания которой равны a, плоскостью RUV равна Q. Найдите боковую поверхность пирамиды.

---

167. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, учитывая, что:

а) $\cos\alpha = \frac{21}{29}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{45}{28}$; ж) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{39}{52}$;

б) $\sin\alpha = \frac{12}{37}$; д) $\cos\alpha = \frac{11}{61}$; з) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{33}{56}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{40}$; е) $\sin\alpha = \frac{60}{61}$; и) $\sin\alpha = \frac{60}{229}$.

168. Постройте график функции:

а) $y = 3x + 2$; б) $y = -3x + 2$; в) $y = 3x - 2$; г) $y = -3x - 2$.

Найдите координаты точек пересечения графика с осями координат.

169. Постройте график функции:

а) $y = x + 2$; в) $y = -\sqrt{3}x + 3$;

б) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 1$; г) $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Найдите угол, образованный верхней полупрямой с положительным направлением оси абсцисс.

170. Найдите угол между прямыми, которые являются графиками функций $y = 2x - 1$ и $y = -3x + 2$.

171. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 2x - 3$; в) $y = |x^2 + 2x - 3|$;

б) $y = \frac{x-2}{3-2x}$; г) $y = \left|\frac{x-2}{3-2x}\right|$.

Найдите промежутки, на которых функция возрастает и на которых убывает.

172. Постройте график функции:

а) $y = 2(x-2)^2 - 2$; в) $y = x^2 + 4x - 5$;

б) $y = \frac{2}{3(1-x)} + 1$; г) $y = \frac{2x-1}{3x+4}$.

Найдите промежутки, на которых функция принимает положительные значения и на которых — отрицательные.

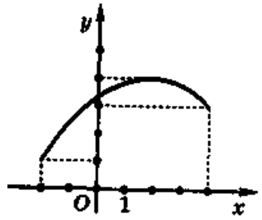


Рис. 123

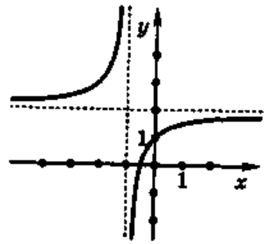


Рис. 124

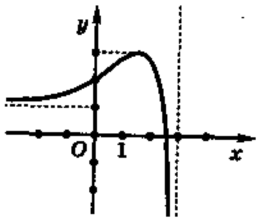


Рис. 125

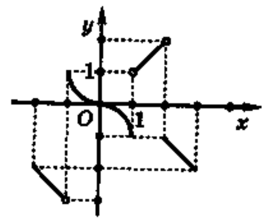


Рис. 126

173. Запишите область определения и область значений функции, график которой изображен на рисунке:
а) 123; б) 124; в) 125; г) 126.

174. Начертите график четной и, если можно, график нечетной функций, учитывая, что для отрицательных значений аргумента он показан на рисунке:
а) 127; б) 128; в) 129; г) 130.

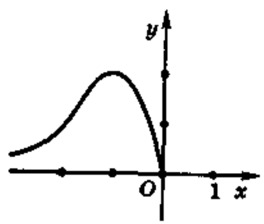


Рис. 127

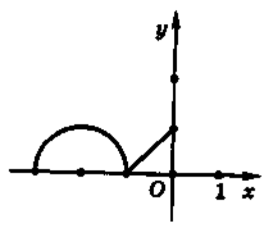


Рис. 128

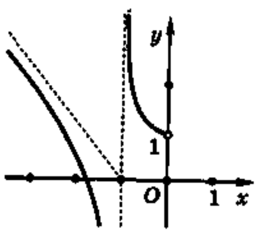


Рис. 129

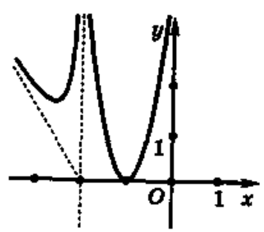


Рис. 130

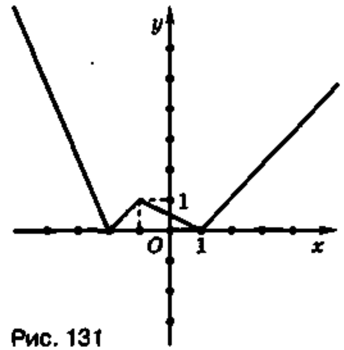


Рис. 131

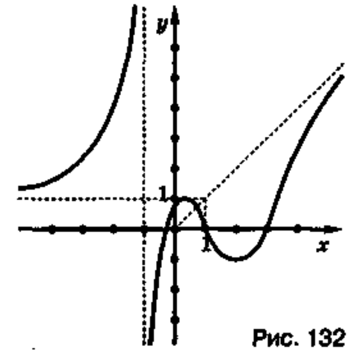


Рис. 132

175. Используя графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, приведенные на рисунках 131 и 132 соответственно, постройте график функции:

а) $y = f(x) + 2$; г) $y = -0{,}5g(x)$; ж) $y = f(x) + g(x)$;
б) $y = g(x) - 1$; д) $y = f(0{,}5x)$; з) $y = f(x) - g(x)$;
в) $y = 2f(x)$; е) $y = g(-2x)$; и) $y = g(f(x))$.

176. Есть два многоугольника, суммы внутренних углов которых отличаются на 720°, а вместе эти углы составляют 2520°. Какие это многоугольники?

177. Велосипедист сначала ехал со скоростью 21 км/ч, а затем снизил ее и с меньшей скоростью проехал 35 км. Найдите меньшую скорость движения велосипедиста, учитывая, что с ней он ехал на 1,5 ч больше, а средняя скорость на всем пути оказалась равной 16 км/ч.

178. На отрезке AB выбрана такая точка U, что $UB - UA = 6$ см, и на полученных частях UA и UB как на высотах построили такие треугольники APQ и UTV, что основание PQ первого из них равно 20 см, а площадь второго — 78 см² (рис. 133).

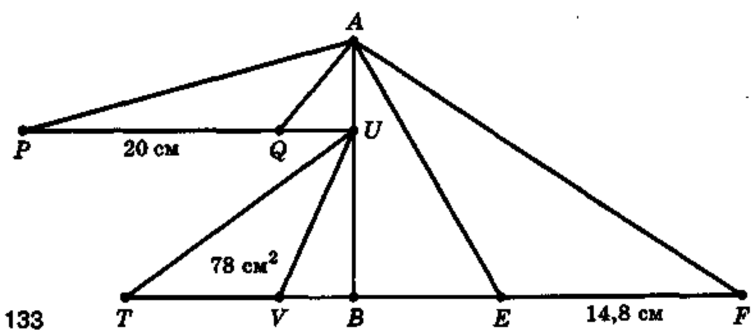


Рис. 133

Найдите длину отрезка AB, учитывая, что когда на нем как на высоте построили третий треугольник AEF с площадью, равной сумме площадей треугольников APQ и UTV, то его основание EF оказалось равным 14,8 см.

179. Есть две коробки для укладывания конфет. Вместимость первой коробки равна 30 конфетам, а во второй коробке конфеты укладываются в 3 ряда и в одном ряду помещается на 3 конфеты больше. Найдите вместимость второй коробки, учитывая, что все конфеты из обеих коробок в точности помещаются в третью коробку, в которой в один ряд укладывается 6 конфет, и рядов столько, сколько их вместе в первой и второй коробках.

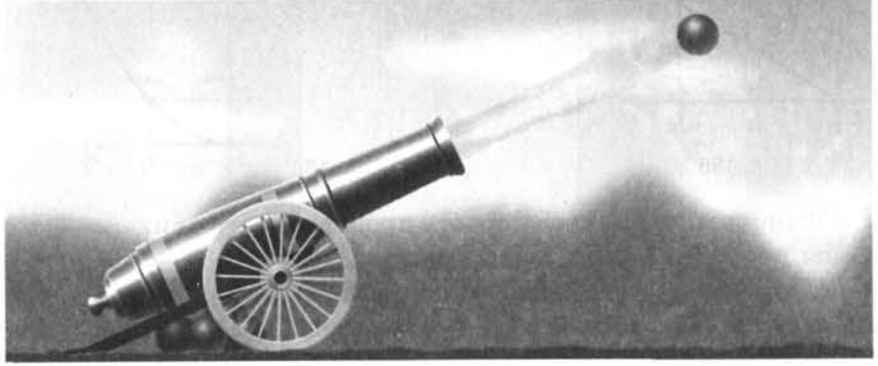
* * *

180. Учитывая, что $a+b+c=2$ и $a^3+b^3+c^3=8$, найдите сумму $a^5+b^5+c^5$.

181. Докажите, что если положительные числа a, b, m, n удовлетворяют неравенству $ab > am + bn$, то они удовлетворяют и неравенству $\sqrt{a+b} > \sqrt{m} + \sqrt{n}$.

182. Среди парабол $y = x^2 + px + q$ есть такие, которые пересекают оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, заданные этими тройками точек, имеют общую точку.

Раздел II



ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ

4. Производная

Представим, что мы сели в машину и поехали. Понятно, что со временем t изменяется (увеличивается) пройденный путь s, изменяется и скорость v, т. е. путь s и скорость v являются функциями времени t.

Наш опыт говорит о том, что путь и скорость связаны между собой. Например, при равномерном движении путь, скорость и время связаны зависимостью $s = vt$. Общий способ описания связи между этими величинами изобрел английский физик и математик Исаак Ньютон (1643—1727) (рис. 134). Открытие Ньютона дало возможность описать многие процессы, изучаемые физикой, химией, биологией, техническими науками, так как связи между величинами, характеризующими эти процессы, аналогичны связям между путем, скоростью и временем.

Понятие производной обобщает понятие скорости. При равномерном движении пройденный телом путь s прямо пропорционален времени движения t (рис. 135), причем скорость — это коэффициент пропорциональности, показывающий путь, пройденный за единицу времени. Для нахождения скорости можно путь $s_2 - s_1$, пройденный за время $t_2 - t_1$, разделить на это время:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Рис. 134

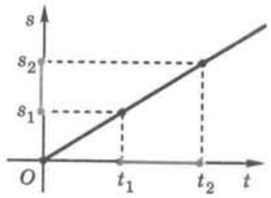


Рис. 135

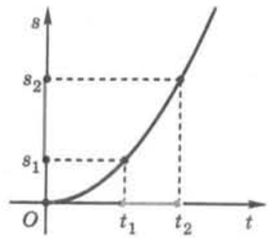


Рис. 136

Выясним, что такое скорость произвольного движения, законы которого самые разнообразные.

Пусть тело движется по закону, график которого изображен на рисунке 136. За время $t_2 - t_1$ от момента t_1 до момента t_2 оно пройдет путь $s_2 - s_1$. Тогда отношение $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ дает среднюю скорость $\overline{v}$ движения тела на временном промежутке $[t_1;\ t_2]$:

$$\overline{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Для определения скорости тела в момент t, которую называют *мгновенной скоростью*, поступим так. Выберем временной промежуток $[t;\ t_1]$, найдем на нем среднюю скорость и будем уменьшать промежуток $[t;\ t_1]$, приближая t_1 к t. Если закон движения тела задается формулой $s = \frac{gt^2}{2}$, то

$$\overline{v} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{\frac{g}{2}(t_1^2 - t^2)}{t_1 - t} = \frac{g}{2}\frac{(t_1 - t)(t_1 + t)}{t_1 - t} = \frac{g}{2}\cdot(t_1 + t).$$

Если теперь уменьшать промежуток времени $[t;\ t_1]$, приближая значение t_1 к t, то сумма $t_1 + t$ приближается к $t + t$, т. е. к $2t$, а выражение $\frac{g}{2}(t_1 + t)$ приближается к $\frac{g}{2}\cdot 2t$, т. е. к gt. Число gt — значение мгновенной скорости в момент t. Получили хорошо известную вам формулу

$$v = gt,$$

выражающую зависимость скорости от времени при свободном падении тела.

Действие, похожее на переход от средней скорости на промежутке $[t;\ t_1]$ к мгновенной скорости в точке t, называется *действием предельного перехода*. Говорят, что при стремлении t_1 к t выражение $\frac{g}{2}(t_1 + t)$ стремится к gt, и записывают:

$$\frac{g}{2}(t_1 + t) \xrightarrow{t_1 \to t} gt, \text{ или } \lim_{t_1 \to t}\frac{g}{2}(t_1 + t) = gt.$$

Рис. 137

Рис. 138

Таким образом, мгновенная скорость в момент t является пределом средней скорости при стягивании промежутка, на котором она измеряется, в точку, т. е.

$$v(t) = \lim_{t_1 \to t}\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}.$$

К подобным выводам пришел и немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646—1716) (рис. 137), решая задачу о проведении касательной к произвольной кривой.

Когда мы ножницами вырезаем из бумаги криволинейную фигуру, то эта линия представляет собой ломаную из очень маленьких звеньев. Именно так рассматривали кривую создатели математического анализа. В первом учебнике по анализу, написанному 300 лет назад Гийомом Лопиталем (1661—1704) (рис. 138), касательная определяется так: «Если продлить одно из маленьких звеньев ломаной, из которых состоит кривая линия, то эта продленная прямая называется касательной к кривой» (рис. 139).

Наглядное представление о касательной дает край линейки, приложенной в выбранной точке к сделанной из проволоки кривой (рис. 140).

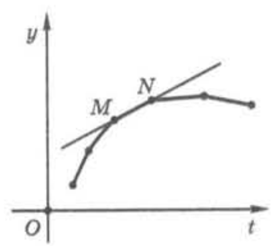


Рис. 139

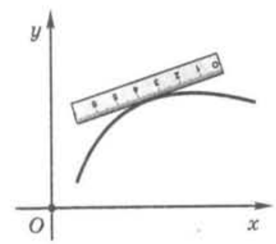


Рис. 140

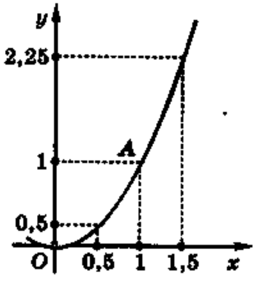


Рис. 141

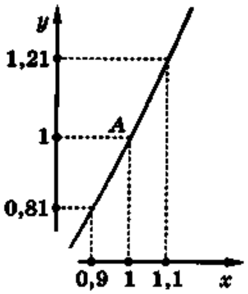


Рис. 142

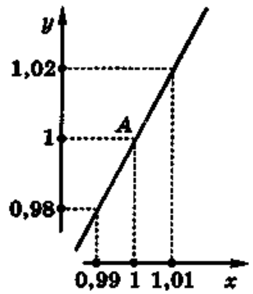


Рис. 143

Посмотрим в микроскоп на параболу $y = x^2$ в окрестности точки A (1; 1). На рисунке 141, где эта парабола изображена без увеличения, отчетливо видна искривленность линии, на рисунке 142, на котором окрестность точки A увеличена в 10 раз, искривление едва заметно, а на рисунке 143, где окрестность точки A увеличена в 100 раз, участок параболы визуально не отличается от отрезка прямой, которая и является касательной к параболе в точке A.

Уточним это представление о касательной к кривой. Пусть дана некоторая кривая l и точка A на ней (рис. 144). Выберем на кривой вторую точку A_1 и проведем прямую AA_1, которую называют *секущей*. Будем приближать точку A_1 к точке A. При этом секущая будет поворачиваться вокруг точки A и стремиться к некоторому предельному положению, которое и является касательной к кривой в точке A.

Переведем описанный процесс на точный язык формул. Пусть кривая l — график функции $y = f(x)$ (рис. 145). Пусть абсциссы точек A и A_1 соответственно равны x и x_1, тогда их ординаты равны $f(x)$ и $f(x_1)$. Касательной к кривой l в точке A является определенная прямая, проходящая через точку A. Положение касательной зависит от углового коэффициента a. Найдем сначала угловой коэффициент a_1 секущей AA_1. Он равен тангенсу угла α, образованного прямой AA_1 с положительным направлением оси абсцисс. Как показывает рисунок 145,

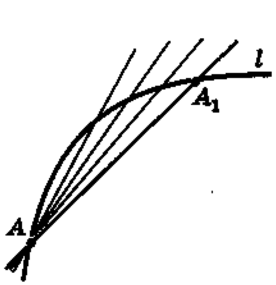


Рис. 144

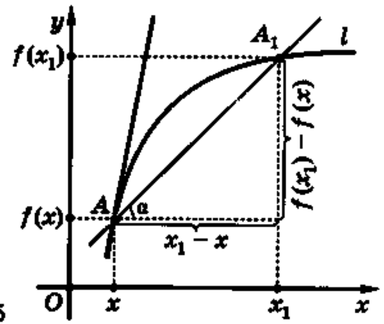


Рис. 145

$$a_1 = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Чтобы найти угловой коэффициент a, будем приближать x_1 к x. Тогда точка A_1 будет приближаться к точке A, а секущая AA_1 — к касательной в точке A. Иными словами, угловой коэффициент a есть предел выражения $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ при стремлении x_1 к x:

$$a(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Мы получили ту же задачу, что и при нахождении скорости: выполнить предельный переход в выражении $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ при стремлении x_1 к x. Этот предельный переход является новым математическим действием, которое выполняется над функцией и называется *дифференцированием функции*, или *нахождением производной функции*.

Математический анализ, который был создан Ньютоном и Лейбницем во второй половине XVII в., около двух столетий развивался на основе интуитивного понятия производной как скорости изменения функции. Строгое математическое определение производной стало возможным только в конце XIX в. после уточнения основных понятий математического анализа — действительного числа, функции, предела.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ при стремлении x_1 к x.

Разность $x_1 - x$ значений аргумента называют *приращением аргумента* и обозначают Δx (читается *дельта икс*), а разность $f(x_1) - f(x)$ соответствующих значений функции $y = f(x)$ называют приращением функции и обозначают Δy. Тогда средняя скорость изменения функции есть выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Стягивание промежутка $[x_1; x]$ в точку x означает стремление Δx к нулю. Производную функции $y = f(x)$ обозначают y', или f'.

Введенные обозначения позволяют так переформулировать определение производной.

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитывая определение производной, получаем, что

$$v(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = s'(t),$$

$$a(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x),$$

т. е. что мгновенная скорость v в момент t тела, которое движется по закону $s = s(t)$, равна значению производной $s'(t)$ в момент t, а угловой коэффициент a касательной $y = ax + b$ к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x; f(x))$ равен значению производной $f'(x)$ в точке с абсциссой x. Понятно, что значение производной зависит от выбора значения x и поэтому производная данной функции — также функция с аргументом x.

Нахождение производной требует выполнения предельного перехода. Его сущность заключается в определении того, как себя ведет функция $y = f(x)$ при приближении аргумента x к определенному значению a. Рассмотрим, например, функцию $y = 3 - x^2$ и будем приближать аргумент x к числу 2, оформив вычисления таблицей.

x	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001
y	−6	−3,25	−1,41	−1,0401	−1,004001	−1,00040001	−1,0000400001

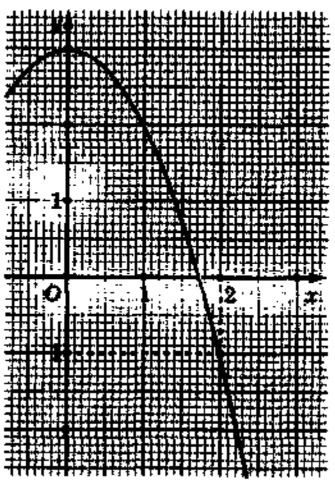


Рис. 146

Можно заметить, что при приближении значения аргумента x к числу 2 значение функции приближается к числу −1, а это есть значение функции для значения аргумента, равного 2 (рис. 146). Так ведут себя все функции, которые в точке $x = a$ не имеют разрыва: предел функции при стремлении аргумента к числу a из области определения равен значению функции в точке a, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Этот факт отражает важнейшее свойство элементарных функций во всех точках из области определения, которое будем называть *принципом непрерывности*. Его на языке приращений можно записать так:

$$\text{если } \Delta x \to 0, \text{ то } \Delta y \to 0.$$

? 1. Как связаны между собой средняя скорость движения на малом промежутке $[t; t_1]$ и мгновенная скорость движения в момент t?

2. Как связаны между собой угловой коэффициент секущей, проходящей через точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами x и x_1, и угловой коэффициент касательной к этой кривой в точке с абсциссой x?

3. Что называется приращением аргумента и как это приращение обозначается?

4. Что называется приращением функции и как это приращение обозначается?

5. Что называется производной функции $y = f(x)$ и как она обозначается?

6. Как находится мгновенная скорость v тела в момент t, если оно движется по закону $s = s(t)$?

7. Как угловой коэффициент a касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x; f(x))$ связан со значениями функции $f(x)$?

8. Сформулируйте принцип непрерывности на языке предельного перехода; на языке приращений.

183. Тело движется по закону $s = 3t - 1$. Найдите среднюю скорость $\bar{v}$ на временном промежутке:

а) $[0; 1]$; б) $[0; 5]$; в) $[-3; 3]$; г) $[t_1; t_2]$.

184. Тело движется по закону $s = t^2 + 3t$. Найдите среднюю скорость $\bar{v}$ на временном промежутке:

а) $[0; 1]$; б) $[-1; 1]$; в) $[2; 5]$; г) $[t_1; t_2]$.

185. Тело движется по закону $s = \frac{2}{t+1}$. Найдите среднюю скорость $\bar{v}$ на временном промежутке:

а) $[0; 1]$; б) $[0; 3]$; в) $[1; 9]$; г) $[t_1; t_2]$.

186. На рисунке 147 изображен график зависимости пути s от времени t. Найдите среднюю скорость движения на временном промежутке:

а) $[0; 4]$; е) $[2; 4]$;
б) $[0; 2]$; ж) $[1; 2]$;
в) $[0; 1]$; з) $[1,5; 2]$;
г) $[0; 0,5]$; и) $[2; 3]$;
д) $[3; 4]$; к) $[2; 2,5]$.

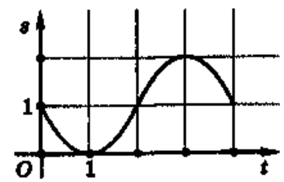


Рис. 147

187. Точка движется прямолинейно по закону $s = 3t + 2$. Найдите:

а) среднюю скорость движения на промежутке [2; 2,2];
б) среднюю скорость движения на промежутке [3; 4];
в) мгновенную скорость при $t = 2$;
г) мгновенную скорость при $t = 3$.

188. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^2$. Найдите:

а) среднюю скорость движения на промежутке [1; 2];
б) среднюю скорость движения на промежутке [1; 1,2];
в) среднюю скорость движения на промежутке [1; 1,02];
г) среднюю скорость движения на промежутке [2; 2,02];
д) мгновенную скорость при $t = 1$;
е) мгновенную скорость при $t = 2$.

189. На рисунке 148 изображена графиком зависимость пути от времени. Найдите:

а) среднюю скорость движения на промежутке [0; 4];
б) среднюю скорость движения на промежутке [2; 4];
в) среднюю скорость движения на промежутке [3; 4];
г) среднюю скорость движения на промежутке [3,5; 4];
д) мгновенную скорость при $t = 2$;
е) мгновенную скорость при $t = 3$.

190. Учитывая, что на рисунке 149 изображен график зависимости перемещения x от времени t:

а) определите, на каких промежутках средняя скорость движения была наибольшей;
б) в какой точке мгновенная скорость движения была наибольшей;
в) приведите примеры промежутков времени, на которых средние скорости одинаковы;
г) приведите примеры моментов времени, на которых мгновенные скорости одинаковы.

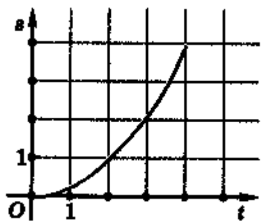


Рис. 148

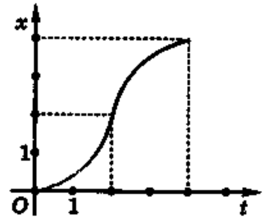


Рис. 149

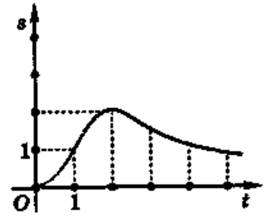


Рис. 150

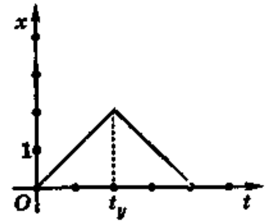


Рис. 151

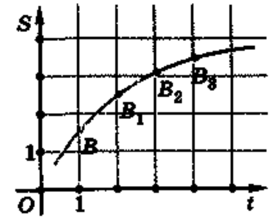


Рис. 152

191. По графику зависимости пути s от времени t на рисунке 150 найдите скорость движения в момент t, равный:

а) $t = 0$; б) $t = 1$; в) $t = 2$; г) $t = 3$.

192. Постройте график зависимости скорости от времени, учитывая, что зависимость пути от времени представлена на рисунке 150.

193. Постройте график зависимости скорости от времени, учитывая зависимость перемещения x тела от времени t при упругом ударе, изображенную на рисунке 151.

194. Постройте график функции $y = x^2$. Найдите угловой коэффициент секущей, проходящей через точки этого графика с абсциссами:

а) −1 и 0; в) −1 и 3; д) 0 и 3;
б) −1 и 1; г) 0 и 1; е) 1 и 3.

195. На рисунке 152 изображен график некоторой функции и его точки B, B_1, B_2, B_3. Определите угловой коэффициент секущей:

а) BB_1; в) BB_3; д) B_1B_3;
б) BB_2; г) B_1B_2; е) B_2B_3.

196. На рисунках 153—158 изображены графики трех функций и трех их производных. Запишите пары номеров

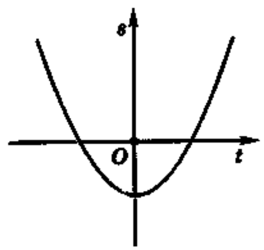


Рис. 153

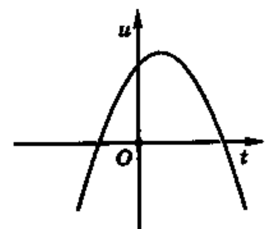


Рис. 154

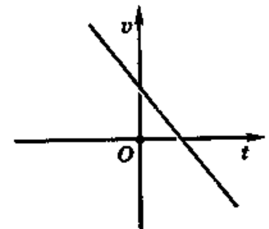


Рис. 155

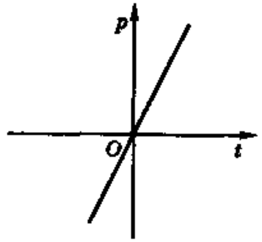


Рис. 156

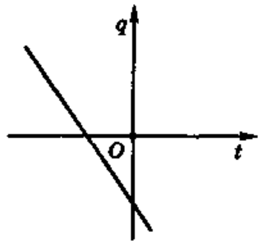


Рис. 157

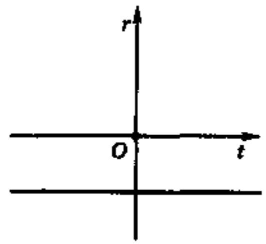


Рис. 158

рисунков, первый компонент каждой из которых указывает график функции, второй — график ее производной.

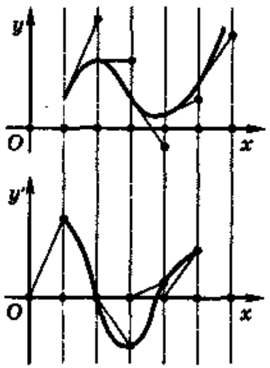


Рис. 159

197. На рисунке 159 показан способ построения графика скорости по графику пути. Опишите этот способ и, используя его, постройте график производной функции, заданной графиком на рисунке.

а) 160; б) 161; в) 162.

198. Постройте примерный график производной функции, которая задана графиком на рисунке:

а) 163; б) 164.

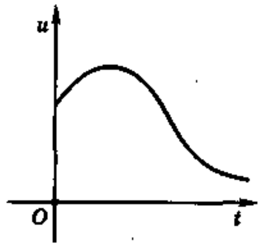


Рис. 160

Рис. 161

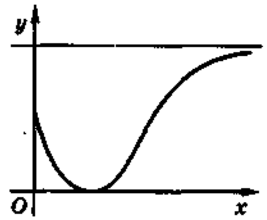


Рис. 162

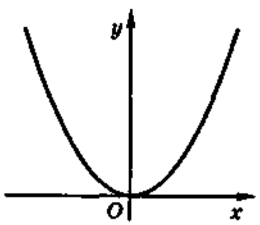


Рис. 163

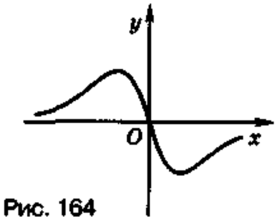


Рис. 164

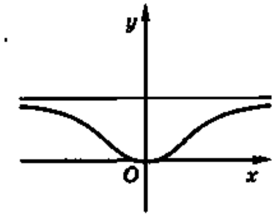


Рис. 165

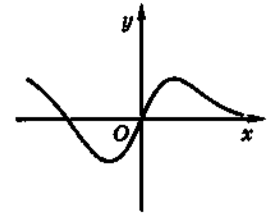


Рис. 166

199. Нарисуйте примерный график функции, график производной которой изображен на рисунке:

а) 165; б) 166.

200. Для функции $y = 2x + 5$ найдите:

а) x_1 и Δy, учитывая, что $x = 3$ и $\Delta x = 0{,}2$;
б) x_1 и Δy, учитывая, что $x = 4$ и $\Delta x = 0{,}06$;
в) Δy, учитывая, что $x = 4$ и $\Delta x = 0{,}1$;
г) Δy, учитывая, что $x = 7$ и $\Delta x = 0{,}01$.

201. Для функции $y = x^2$ найдите приращения Δx и Δy, учитывая, что:

а) $x_1 = 2{,}5$ и $x = 2$; в) $x_1 = -1{,}2$ и $x = -1$;
б) $x_1 = 3{,}9$ и $x = 3{,}75$; г) $x_1 = -2{,}7$ и $x = -2{,}5$.

202. Для функции $y = x^2 - x$ найдите Δy, учитывая, что:

а) $x = 1{,}5$ и $\Delta x = 2{,}5$; в) $x = 4$ и $\Delta x = 3$;
б) $x = 1{,}5$ и $\Delta x = 3{,}5$; г) $x = -7$ и $\Delta x = 1{,}2$.

203. Есть функция $y = \frac{1}{x}$. Найдите Δy и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, учитывая, что:

а) $x = 9$, $\Delta x = 0{,}06$; в) $x = 4{,}02$, $\Delta x = -0{,}02$;
б) $x = 4{,}96$, $\Delta x = 0{,}04$; г) $x = 6$, $\Delta x = -0{,}02$.

204. Найдите среднюю скорость роста функции $y = x^2 - 4x$ на промежутке:

а) [0; 1]; б) [0; 0,5]; в) [0; 0,1]; г) [0; 0,01].

Найдите производную этой функции в точке $x = 0$.

205. Определите, у какой из функций — f_1 или f_2 — больше скорость роста их графиков на рисунке:

а) 167; б) 168; в) 169.

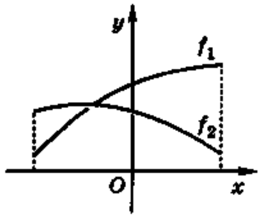


Рис. 167

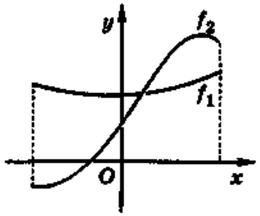


Рис. 168

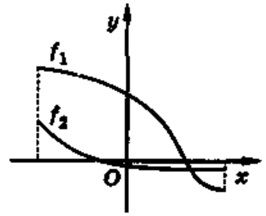


Рис. 169

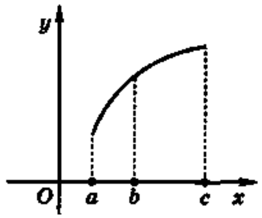


Рис. 170

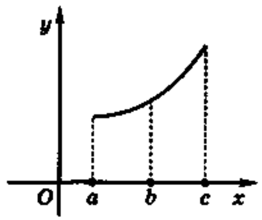


Рис. 171

206. Определите, на каком из промежутков — $[a, b]$ или $[b, c]$ — больше скорость роста функции, график которой изображен на рисунке:

а) 170; б) 171.

207. Выразите приращение функции в точке x через x и Δx, учитывая, что:

а) $y = 5 - 3x$; в) $f(x) = 3x^2$;
б) $y = 2\sqrt{x}$; г) $f(x) = 2x - x^2$.

208. Найдите $f(x + \Delta x)$, $f(x + \Delta x) - f(x)$, $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, учитывая, что:

а) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = ax^2 + bx + c$;
б) $f(x) = ax + b$; г) $f(x) = x^3$.

209. Докажите:

а) признак возрастания: функция f возрастает на промежутке I тогда и только тогда, когда для любых двух значений x и $x + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) из промежутка I выполняется условие $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$;
б) аналогичный признак убывания функции на промежутке I, предварительно сформулировав его.

210. Пользуясь признаками возрастания и убывания функции (см. упражнение 209), найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $f(x) = 2x + 3$; в) $g(x) = 7 - 5x$;
б) $p(x) = x^2$; г) $g(x) = 3 - x^2$.

211. Найдите значение производной функции $y = 2x - 3$ в точке:

а) 1; б) 3; в) x_0.

212. Докажите, что значение производной линейной функции $y = kx + b$ в любой точке x равно угловому коэффициенту прямой, являющейся графиком этой функции. Какое уравнение задает касательную к графику функции $y = kx + b$, проходящую через точку с абсциссой x_0?

213. Для функции $y = \frac{x^2}{2}$ вычислите значение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $x = \frac{1}{2}$ при Δx, равном:

а) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{16}$; д) $\frac{1}{100}$;
б) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{32}$; е) $\frac{1}{1000}$.

214. Найдите значение производной функции $y = x^2 - x$ в точке:

а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $-\frac{1}{2}$; г) x_0.

215. Для функции $y = \frac{1}{x}$ определите, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю, в точке:

а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) x_0.

---

216. Упростите выражение:

а) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$; в) $\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)}{a - b}$;
б) $\frac{a^3 + b^3}{a^3b - ab^3}$; г) $\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 - b^2}$.

217. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{1 - 25x^2} + \frac{1}{25x^2 - 10x + 1}$; в) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$;
б) $\frac{y}{9 - 4y^2} + \frac{1}{4y + 6}$; г) $\frac{m + 2}{m^2 - 2m} - \frac{m - 2}{m^2 + 2m}$.

218. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt{3} + 2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}$.

9 — 2149

219. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1-x^{-0,5}}{1+x^{-0,5}}+\frac{1+x^{-0,5}}{1-x^{-0,5}}\right):\frac{1+x}{1-x}$;

б) $\left(\frac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\frac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}\right)(a^{0,5}+b^{0,5})$;

в) $\left(\frac{ab^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}+\frac{a^{0,5}b}{a^{0,5}-b^{0,5}}\right):\frac{-1}{a^{-0,5}b^{-0,5}}$;

г) $\frac{x+\sqrt{x^2-xy}}{x-\sqrt{x^2-xy}}+\frac{x-\sqrt{x^2-xy}}{x+\sqrt{x^2-xy}}$.

220. Найдите периметр равнобедренного треугольника с основанием 12 и углом при вершине в 120°.

221. Диагонали параллелограмма пересекаются под углом 60° и относятся как 5 : 8, а его площадь равна $160\sqrt{3}$. Найдите периметр параллелограмма.

222. Найдите высоты равнобедренного треугольника с основанием 18 и боковой стороной 15.

223. Два тела движутся в одном направлении — одно со скоростью 6 м/с, другое — со скоростью 21 м/с и догоняет первое. После абсолютно неупругого столкновения они продолжают двигаться вместе как одна система со скоростью 12 м/с. Найдите импульсы тел, учитывая, что масса первого тела на 1 кг больше.

224. Два тела массами 3 кг и 8 кг движутся в одном направлении так, что скорость второго тела на 18 м/с больше. Найдите эти скорости, учитывая, что если бы третье тело имело импульс, равный суммарному импульсу первого и второго тел, и двигалось со скоростью, равной сумме скоростей первого и второго тел, то его масса была бы равной 7 кг.

* * *

225. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3, \\ y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0. \end{cases}$$

226. Когда в треугольнике ABC провели высоты AM, BN, CK, то оказалось, что треугольники ABC и MNK подобны. Найдите возможные значения углов A, B, C.

227. Внутреннюю точку Q выпуклого четырехугольника $ABCD$ с площадью S соединили с вершинами и нашли точки M, N, K, L, в которых пересекаются медианы треугольников QAB, QBC, QCD, QDA соответственно. Найдите площадь четырехугольника $MNKL$.

5. Правила нахождения производных

В соответствии с определением $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при нахождении производной можно пользоваться следующим предписанием.

- Найти приращение Δy функции $y=f(x)$ на промежутке $[x;\ x+\Delta x]$:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

- Разделить приращение функции Δy на приращение аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

- Найти предел выражения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при стремлении Δx к нулю:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Действие нахождения производной функции называется *дифференцированием функции.*

Функция, имеющая производную, называется *дифференцируемой функцией.*

Теорема 1. ***Истинны следующие формулы дифференцирования:***

$$c'=0;\qquad (ax^2)'=2ax;\qquad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2};$$

$$(ax+b)'=a;\qquad (x^3)'=3x^2;\qquad \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Доказательство. Найдем производную постоянной функции $y=c$. Будем иметь:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0.$$

Поэтому

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

Мы посчитали, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$, так как выражение 0 не зависит от Δx.

Найдем производную функции $y = ax + b$. Будем иметь:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (a(x+\Delta x)+b) - (ax+b) =$$
$$= ax + a\Delta x + b - ax - b = a\Delta x;$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a.$$

Поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a.$$

Найдем производную функции $y = ax^2$. Будем иметь:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = a(x+\Delta x)^2 - ax^2 =$$
$$= ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 - ax^2 = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2;$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax\Delta x + a(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x.$$

Поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax.$$

Мы посчитали, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax$, так как выражение $2ax$ не зависит от Δx, а выражение $a\Delta x$ стремится к нулю, когда Δx стремится к нулю.

Найдем производную функции $y = x^3$. Будем иметь:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2.$$

Мы посчитали, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$, так как выражение $3x^2$ не зависит от Δx, а выражение $3x\Delta x + (\Delta x)^2$ стремится к нулю, когда Δx стремится к нулю.

Найдем производную функции $y = \frac{1}{x}$. Будем иметь:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)};$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$$

Поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Мы посчитали, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}$, так как выражение $x + \Delta x$ стремится к x, когда Δx стремится к нулю.

Найдем производную функции $y = \sqrt{x}$. Будем иметь:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x};$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Мы посчитали, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, так как выражение $\sqrt{x+\Delta x}$ стремится к $\sqrt{x}$, когда Δx стремится к нулю.

Теорема 2. ***Если функции u и v дифференцируемы, то производные их суммы, произведения, частного выражаются формулами:***

$$(u+v)' = u' + v'; \qquad (uv)' = u'v + uv'; \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доказательство. Найдем правила нахождения производной суммы функций. Пусть $y = u(x) + v(x)$. Тогда

$$\Delta y = (u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)) - (u(x) + v(x)) =$$
$$= (u(x+\Delta x) - (u(x)) + (v(x+\Delta x) - v(x)).$$

Теперь учтем, что $u(x+\Delta x) - u(x)$ является приращением Δu функции $u(x)$, а $v(x+\Delta x) - v(x)$ — приращением Δv функции $v(x)$. Поэтому:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v;$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Поскольку функции u и v дифференцируемы, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Значит,

$$(u+v)' = u' + v'.$$

Найдем правило нахождения производной произведения функций. Пусть $y = u(x)v(x)$. Тогда

$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x).$$

Теперь учтем, что приращение $u(x+\Delta x)-u(x)$ функции $u(x)$ можно записать как $u(x)+\Delta u$, а приращение $v(x+\Delta x)-v(x)$ функции $v(x)$ — как $v(x)+\Delta v$. Поэтому

$$\Delta y=(u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v)-u(x)v(x)=$$
$$=u(x)v(x)+u(x)\Delta v+v(x)\Delta u+\Delta u\Delta v-u(x)v(x)=$$
$$=u(x)\Delta v+v(x)\Delta u+\Delta u\Delta v.$$

Значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v(x)\Delta u+u(x)\Delta v+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Поскольку функции u и v дифференцируемы, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v',$$

а в соответствии с принципом непрерывности

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'v(x)+v'u(x)+u'\cdot 0=u'v+v'u.$$

Найдем правило нахождения производной частного функций. Пусть $y=\frac{u}{v}$. Тогда $u=yv$. Используя формулу для производной произведения, получаем:

$$u'=y'v+yv'.$$

Из этой формулы выразим y' и учтем, что $y=\frac{u}{v}$:

$$y'=\frac{u'-yv'}{v}=\frac{u'-\frac{u}{v}v'}{v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Следствие 1. ***Константу можно выносить за знак дифференцирования:***

$$(cu)'=cu'.$$

Действительно, применив формулу для производной произведения, получаем:

$$(cu)'=c'u+cu'=0\cdot u+cu'=cu'.$$

Пример 1. Найдем производную функции $z=\frac{1}{t}+t^2$. Имеем:

$$z'=\left(\frac{1}{t}+t^2\right)'=\left(\frac{1}{t}\right)'+(t^2)'=$$
$$=-\frac{1}{t^2}+2t=2t-\frac{1}{t^2}.$$

Следствие 2. ***Производная разности дифференцируемых функций равна разности их производных:***

$$(u-v)'=u'-v'.$$

Действительно, с учетом теоремы 2 и следствия 1, имеем:

$$(u-v)'=(u+(-v))'=u'+(-1\cdot v)'=u'+(-1)\cdot v'=u'-v'.$$

Пример 2. Найдем производную функции $y=5x^2-\frac{4-x}{x^2}$. Имеем:

$$y'=(5x^2)'-\left(\frac{4-x}{x^2}\right)'=5(x^2)'-\frac{(4-x)'\cdot x^2-(4-x)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}=$$
$$=10x-\frac{(-1)\cdot x^2-(4-x)\cdot 2x}{x^4}=$$
$$=10x-\frac{x(-x-8+2x)}{x^4}=10x-\frac{x-8}{x^3}=\frac{10x^4-x+8}{x^3}.$$

Следствие 3. ***Если n — целое число, то:***

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

▶ Действительно, если n равно 0, 1 или 2, то, как установлено в теореме 1, $1'=0$, $x'=1$ и $(x^2)'=2x$. Эти результаты можно рассматривать как значения выражений $0\cdot x^{-1}$, $1\cdot x^0$ и $2\cdot x^1$.

Если равенство $(x^k)'=kx^{k-1}$ истинно, то

$$(x^{k+1})'=(x^k\cdot x)'=(x^k)'\cdot x+x^k\cdot x'=kx^{k-1}\cdot x+x^k\cdot 1=$$
$$=kx^k+x^k=(k+1)x^k,$$

т. е. истинно и равенство $(x^{k+1})'=(k+1)x^k$. Теперь с учетом принципа математической индукции можно сделать вывод о том, что формула $(x^n)'=nx^{n-1}$ истинна при всех натуральных значениях переменной n.

Если n — отрицательное целое число, т. е. $n=-m$, где m — натуральное число, то, используя определение отрицательной степени и формулу для производной частного, получаем:

$$(x^n)'=(x^{-m})'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=\frac{(1)'\cdot x^m-(x^m)'\cdot 1}{(x^m)^2}=\frac{0\cdot x^m-mx^{m-1}\cdot 1}{x^{2m}}=$$
$$=\frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}}=-m\cdot\frac{1}{x^{m+1}}=-m\cdot x^{-m-1}=n\cdot x^{n-1}.$$

Формула дифференцирования $(x^n)'=nx^{n-1}$ истинна и для дробных показателей. Убедимся в этом для случая $n=\frac{1}{2}$, т. е. для функции $y=\sqrt{x}$. С одной стороны, мы знаем, что $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, с другой стороны, по формуле $(x^n)'=nx^{n-1}$ получаем:

$$y'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$ ◀

Пример 3. Найдем производную функции $s = 7t^4 - \frac{3}{t^5}$. Имеем:

$$s' = \left(7t^4 - \frac{3}{t^5}\right)' = (7t^4)' - (3t^{-5})' = 7 \cdot 4t^3 - 3 \cdot (-5)t^{-6} =$$
$$= 28t^3 + \frac{15}{t^6} = \frac{28t^9 + 15}{t^6}.$$

Рассмотрим функцию $z = (6x - 7)^{47}$. Мы можем найти производную этой функции, представив ее многочленом сорок седьмой степени, который имеет 48 слагаемых. Однако можно достичь цели и более просто, обратив внимание на то, что функцию $z = (5x - 7)^{47}$ можно рассматривать как композицию функций $y = 6x - 7$ и $z = y^{47}$.

Пусть есть функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Функцию $h = g(f(x))$ называют *сложной функцией*, образованной из функций g и f. Для вычисления значения сложной функции $h = g(f(x))$ в произвольной точке x сначала вычисляют значение y «внутренней» функции f в этой точке, а потом значение z функции g в точке y. Так, чтобы найти значение функции $z = (6x - 7)^{47}$ при $x = 1$ сначала находим, что $6 \cdot 1 - 7 = -1$, а затем, что $(-1)^{47} = -1$.

▶ **Теорема 3.** ***Если функция f имеет производную в точке x, а функция g — производную в точке $y = f(x)$, то сложная функция $h = g(f(x))$ также имеет производную в точке x и***

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Доказательство. Пусть функция f имеет производную в точке x, а функция g — производную в точке $y = f(x)$. Пусть $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$, $\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x) = g(f(x + \Delta x) - g(f(x)) = g(y + \Delta y) - g(y) = \Delta g$.

Будем считать, что $\Delta f \neq 0$ в некоторой окрестности точки x. Тогда

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h \cdot \Delta y}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{\Delta h}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда, поскольку f — дифференцируемая функция, по принципу непрерывности получаем, что $\Delta y \to 0$. Значит, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x)$, так как $\Delta x \to 0$, и $\frac{\Delta g}{\Delta y} \to g'(y)$, так как $\Delta y \to 0$. Значит, $h'(x) = g'(f(x))\,f'(x)$. ◀

Пример 4. Найдем производные функций $z = (5x - 7)^{47}$ и $h = \sqrt{5t^8 - 3t^2}$. Имеем:

$$z' = ((5x - 7)^{47})' = 47(5x - 7)^{46} \cdot (5x - 7)' =$$
$$= 47(5x - 7)^{46} \cdot 5 = 235(5x - 7)^{46};$$

$$h' = \left(\sqrt{5t^8 - 3t^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{5t^8 - 3t^2}} \cdot (5t^8 - 3t^2)' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{5t^8 - 3t^2}} \cdot (40t^7 - 6t) = \frac{20t^7 - 3t}{\sqrt{5t^8 - 3t^2}}.$$

?
1. Что называется производной функции и по какой схеме она находится?
2. Чему равна производная константы; линейной функции; функции $y = \frac{1}{x}$; функции $y = \sqrt{x}$?
3. Чему равна производная суммы функций; произведения функций; частного функций?
4. Чему равна производная степенной функции?
5. Как находится производная сложной функции?

228. Пользуясь определением, найдите значения производной функции:

а) $h(x) = x^2$ в точках 2 и 5; б) $f(x) = \frac{1}{x}$ в точках 1 и 4.

229. Найдите значение производной функции $f(x) = x^3 - x + 2$ в точке с абсциссой:

а) -2; б) -1; в) 0.

230. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите:

а) $f'(1)$; б) $f'(4)$; в) $f'(25)$; г) $f'(x)$.

231. Пользуясь определением, найдите производную функции:

а) $y = 2x^2 + 3x$; д) $y = \frac{1}{x^3}$; и) $y = \sqrt[3]{x}$;

б) $y = 2x^3$; е) $y = \frac{x}{x+1}$; к) $y = \sqrt{x+1}$;

в) $y = x^3 + x$; ж) $y = \frac{x}{x+2}$; л) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

г) $y = \frac{2}{x}$; з) $y = -\frac{1}{2x^2}$; м) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

232. Найдите производную функции:

а) $y = 3x^2$; г) $y = \frac{x^3}{3}$; ж) $y = 3\sqrt{x}$; к) $y = \sqrt{2x}$;

б) $y = 4x^4$; д) $y = \frac{2}{x}$; з) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$; л) $y = -\sqrt{3x}$;

в) $y = \frac{x^2}{2}$; е) $y = \frac{1}{2x}$; и) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$; м) $y = x + \frac{1}{x}$.

233. Найдите значение производной функции $f(x)=\frac{1+2x}{1+3x}$ в точке с абсциссой:

а) -1; б) 0; в) 1.

234. Для функции $g(y)=\frac{1}{y^2}$ найдите:

а) $g'(1)$; б) $g'(-1)$; в) $g'(2)$; г) $g'(y)$.

235. Найдите производную функции:

а) $y=(c^2-1)(c^2+1)$; ж) $y=\frac{c^2-1}{c^2+1}$;

б) $y=(c+\sqrt{c})^2$; з) $y=\frac{1}{c^3+1}$;

в) $y=\frac{3}{c-2}$; и) $y=\left(c+\frac{1}{c}+\frac{1}{c^2}\right)(c^2+c+1)$;

г) $y=\frac{c}{c-1}$; к) $y=\left(c^4-\frac{1}{c^4}\right)\left(c^3+\frac{1}{c^3}\right)$;

д) $y=\frac{c^2}{c+1}$; л) $y=\left(c+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)(c^2-3c-8)$;

е) $y=\frac{c-2}{2c^2-1}$; м) $y=\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt{c}-1}$.

236. Есть функции: $g(y)=2-y^2$; $h(y)=\sqrt{y}$; $f(y)=\frac{y}{y-3}$. Задайте формулой функцию:

а) $g(h(y))$; в) $g(f(y))$; д) $h(f(y))$;
б) $h(g(y))$; г) $f(g(y))$; е) $f(h(y))$.

237. Запишите функции, композицией которых является функция:

а) $p=\sqrt{9-z^2}$; г) $p=\frac{1}{\sqrt{z^2-7}}$; ж) $p=\frac{1}{\sqrt{3-d}-1}$;

б) $p=\frac{1}{\sqrt{4-z^2}}$; д) $p=\sqrt{2-\sqrt{d}}$; з) $p=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-d}}}$;

в) $p=\sqrt{z^2-0{,}25}$; е) $p=\sqrt{\frac{1}{d}+1}$; и) $p=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$.

238. Найдите такую функцию f, что $f(g(x))=x$, учитывая, что:

а) $g(x)=x^2$ и $x\geqslant 0$; в) $g(x)=\frac{1}{x}$; д) $g(x)=3x+2$;
б) $g(x)=\sqrt{x}$; г) $g(x)=2x$; е) $g(x)=x^2+1$, $x\leqslant 0$.

239. Найдите производную функции:

а) $(2y-7)^{14}$; е) $\sqrt{3-\frac{1}{4}y}$; л) $\sqrt{9a^2-16}$;

б) $(3+5y)^{10}$; ж) $\sqrt{5y-8}$; м) $\sqrt{7-3a^3}$;

в) $(7y-1)^{-3}$; з) $\sqrt{7-4y}$; н) $(5e-2)^{13}-(3e+7)^{20}$;

г) $\left(\frac{1}{3}y+2\right)^{-5}$; и) $\sqrt{4a^2-1}$; о) $(3e-1)^{15}+(2e+3)^4$;

д) $\sqrt{2y+3}$; к) $\sqrt{\frac{1}{3}a^2+7}$; п) $\sqrt{6e-8}-\sqrt{4e^2-3}$.

240. Найдите производную функции:

а) $y=(m-3)^7$; д) $y=(m+1)^2-3m$; и) $y=\sqrt{-m}$;

б) $y=(3m-4)^9$; е) $y=\frac{1}{(3m+1)^3}$; к) $y=\sqrt{5m-1}$;

в) $y=(1-2m)^4$; ж) $y=\frac{2}{(3m+2)^3}$; л) $y=\sqrt{(m+2)^5}$;

г) $y=(1-m)^5$; з) $y=\sqrt[3]{5m^2}$; м) $y=\sqrt[3]{2m-7}$.

241. Вычислите производную:

а) $z=\left(\sqrt{x}+1\right)^5$; в) $z=\sqrt{1+\sqrt{x}}$; д) $z=\sqrt[3]{2x^3-1}$;

б) $z=\sqrt{x^5+1}$; г) $z=((x+1)^4-2)^3$; е) $z=\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$.

242. Выведите формулу $(f^2(x))'=2f(x)f'(x)$ и вычислите с ее помощью производную:

а) $y=\left(\sqrt{b}+1\right)^2$; в) $y=\left(b+\frac{1}{b}-\sqrt{b}\right)^2$;

б) $y=(b^3+2b^2+b-1)^2$; г) $y=\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2$.

243. Из функций $y=\frac{1}{2}x^2+x$, $y=\sqrt{x+1}$, $y=\frac{4}{\sqrt{x+1}}$ выберите ту, у которой при нулевом значении аргумента самая большая производная.

244. Определите, в какой из двух точек x_1 и x_2 функция $y=3x^2$ растет быстрее, учитывая, что:

а) $x_1=1$, $x_2=-1$; б) $x_1=1$, $x_2=2$; в) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$.

245. Найдите производную функции:

а) d^{10}; д) $\frac{1}{z^4}$; и) $8\sqrt{b}$; н) $g^7 - 3g^2 - g + 5$;

б) $2d^7$; е) $\frac{5}{z^{11}}$; к) $3\sqrt{b^{-3}}$; о) $2g^{10} - g^8 + 3g^3$;

в) d^{-5}; ж) $\frac{1}{3z^{-3}}$; л) $\frac{1}{2\sqrt{b}}$; п) $2g^6 - \frac{1}{g}$;

г) $3d^{-3}$; з) $\frac{6}{z^7}$; м) $\frac{3}{\sqrt{b}}$; р) $\sqrt{x^{-4}} + \frac{x}{2-x}$.

246. Найдите производную функции:

а) $7h^5 + 2\sqrt{h}$; ж) $\frac{3t-2}{5t+8}$; н) $\frac{n-1}{\sqrt{n}}$;

б) $\frac{1+2t}{3-5t}$; з) $(2n-1)\sqrt{n}$; о) $(3+f^2)(2-\sqrt{f})$;

в) $(n+1)\sqrt{n}$; и) $\frac{\sqrt{f}}{4+f}$; п) $(i^3+i^2)(\sqrt{2i}-\sqrt{i})$;

г) $\frac{2f}{1+f^2}$; к) $\frac{\sqrt{x+7}}{4+x}$; р) $h\sqrt{h} - \frac{2}{\sqrt{h}} - \frac{3}{h^2}$;

д) $\frac{1}{g^2} - 3g^4$; л) $\frac{1}{h\sqrt{h}} + \sqrt{h^3}$; с) $\frac{1-7t}{1-9t}$;

е) $\frac{h}{3} - \frac{7}{2h^2}$; м) $\frac{3t-2}{4-6t}$; т) $\frac{\sqrt{n}}{2n+1}$.

247. Докажите, что $|x|' = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ \text{не существует, если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

---

248. Найдите область определения функции:

а) $p = \sqrt{9 - z^2}$; г) $p = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 7}}$; ж) $p = \frac{1}{\sqrt{3-d} - 1}$;

б) $p = \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$; д) $p = \sqrt{2 - \sqrt{d}}$; з) $p = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{1-d}}}$;

в) $p = \sqrt{z^2 - 0{,}25}$; е) $p = \sqrt{\frac{1}{d} + 1}$; и) $p = \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^3$.

249. Найдите область значений функции:

а) $y = 2x^2 - 4x + 3$; в) $y = x + \frac{1}{x}$;

б) $y = (x^2 - 6x + 10)^{-1}$; г) $y = \frac{3x-2}{x + |2x-1|}$.

250. Докажите, что областью значений функции $y = \frac{x^2+x+6}{x^2+x+1}$ является промежуток $\left(1; \frac{23}{3}\right]$.

251. Докажите, что функция $y = x^2 - 6x + 3$ при $x > 3$ возрастает и при $x < 3$ убывает.

252. Докажите, что функция $y = \frac{x}{x^2+1}$:

а) на промежутке $[-1; 1]$ возрастает;
б) на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ убывает.

253. Найдите промежутки, на которых сохраняет свой знак функция:

а) $y = -2x^2 - 6x + 10$; б) $y = \frac{x^3 - 7x - 2}{x^2 + 3x + 2} - \frac{2x - 8}{x + 2}$.

254. На отрезке AB точка M выбрана так, что $MB = 40$ см. На полученных отрезках-частях MA и MB как на основаниях построены такие треугольники MAP и MBR, что площадь первого равна 645 см^2, а его высота на 21 см больше. Найдите высоты этих треугольников, учитывая, что когда на отрезке AB построили треугольник ABT с площадью, равной суммарной площади треугольников MAP и MBR, то его высота оказалась равной 31 см.

* * *

255. На сторонах AB и AC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABFD$ и $ACGL$. Найдите отрезок DL, учитывая, что медиана AM равна a.

256. Учитывая, что неравенство $x^2 + px + q > 0$, где p и q — целые числа, истинно при всех целых значениях переменной x, докажите, что истинно и нераверство $p^2 < 4q$.

257. Можно ли, пользуясь только действиями сложения, вычитания и умножения, из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ получить выражение x, учитывая, что:

а) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + 2$;
б) $f(x) = 2x^2 + x$, $g(x) = 2x$;
в) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 - 2$?

6. Исследование функции с помощью производной

Мы уже умеем читать график функции, т. е. устанавливать свойства функции по ее графику. Теперь ставится обратная задача — научиться строить график функции, определив нужные для этого ее свойства. Это становится возможным, если использовать производную.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке промежутка $[a; b]$, то найдется такая точка c, $a < c < b$, что $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

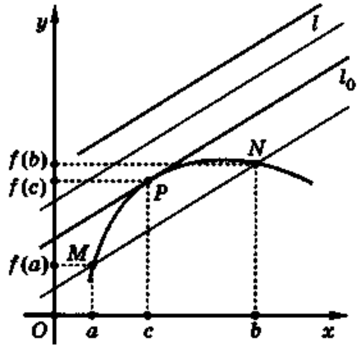


Рис. 172

К этой теореме можно прийти, используя геометрический смысл касательной к графику функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка $[a; b]$. Через точки $M(a, f(a))$ и $N(b, f(b))$ ее графика проведем прямую (рис. 172). Пусть l — какая-либо прямая, параллельная прямой MN, не имеющая общих точек с графиком функции $f(x)$. Эту прямую будем перемещать параллельно самой себе по направлению к графику функции до того момента, пока она не коснется графика в некоторой его точке P. Пусть l_0 — положение прямой l в этот момент, и c — абсцисса точки P. Тогда

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол, образованный прямой l_0 с положительным направлением оси абсцисс. Но касательная l параллельна секущей MN, значит, угол α равен углу наклона секущей MN, т. е.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказанная теорема называется *теоремой Лагранжа*.


Рис. 173

Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) — французский математик и механик (рис. 173). Он самостоятельно изучал математику, сделал значительные открытия в механике, математическом анализе, математической картографии, астрономии и др.

Теорема 5. ***Если функция $f(x)$ в каждой точке промежутка $(a; b)$ имеет производную и если эта производная положительна, то на промежутке $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает, а если эта производная отрицательна, то на промежутке $(a; b)$ функция $f(x)$ убывает.***

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ в каждой точке промежутка $(a; b)$ имеет производную $f'(x)$. Выберем два каких-либо числа x_1 и x_2 из промежутка $(a; b)$, причем $x_1 < x_2$. В соответствии с теоремой Лагранжа найдется такое число c, $x_1 < c < x_2$, что

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Отметим, что число c принадлежит промежутку $(x_1; x_2)$, а значит, и промежутку $(a; b)$.

Если $f'(x) > 0$ на промежутке $(a; b)$, то $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$, а это означает, что на промежутке $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает.

Аналогично, если $f'(x) < 0$ на промежутке $(a; b)$, то на этом промежутке функция $f(x)$ убывает.

Теорема 5 дает *признаки возрастания и убывания функции*.

Рисунок 174 показывает, что если производная $f'(x_0)$ функции в точке x_0 положительна, то касательная к графику образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс, и в определенной окрестности точки x_0 функция $f(x)$ возрастает. А если производная $f'(x_0)$ функции в точке x_0 отрицательна, то касательная к графику образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс, и, как видно из рисунка 175, в определенной окрестности этой точки функция $f(x)$ убывает.

Пример 1. Найдем промежутки возрастания и убывания функции $y = 3x^2 - x^3$ и построим ее график.

Функция $y = 3x^2 - x^3$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Найдем ее производную:

$$y'(x) = 6x - 3x^2.$$

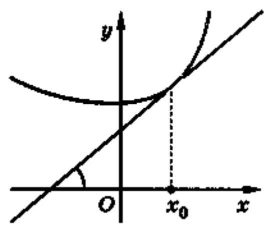


Рис. 174

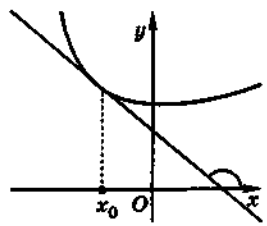


Рис. 175

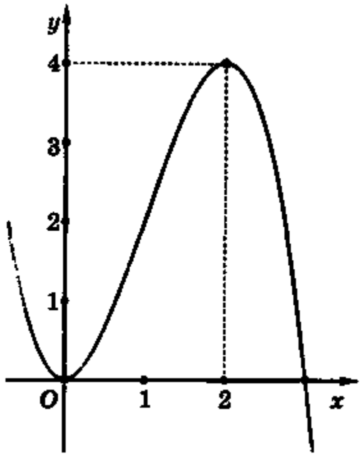


Рис. 176

Найдем промежутки, на которых производная положительна, на которых — отрицательна:

$$6x - 3x^2 > 0 \equiv$$
$$\equiv x(2 - x) > 0 \equiv 0 < x < 2;$$
$$6x - 3x^2 < 0 \equiv x(2 - x) < 0 \equiv x < 0$$
$$\text{или } x > 2.$$

Значит, на промежутке (0; 2) функция $y = 3x^2 - x^3$ возрастает, а на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ — убывает.

Найдем значения функции при значениях аргумента 0 и 2:

$$y(0) = 3 \cdot 0^2 - 0^3 = 0; \; y(2) = 3 \cdot 2^2 - 2^3 = 4.$$

Найдем нули функции:

$$3x^2 - x^3 = 0 \equiv x^2(3 - x) = 0 \equiv x = 0 \text{ или } x = 3.$$

Отметим на координатной плоскости точки (0; 0), (2; 4), (3; 0) и построим график функции, учитывая, что на промежутках $(-\infty; 0)$ функция убывает, на промежутке (0; 2) — возрастает, на промежутке $(2; +\infty)$ — снова убывает (рис. 176).

Рассмотренный пример показывает, что при исследовании функции важно найти точки, в которых возрастание функции сменяется ее убыванием и наоборот.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если для всех значений переменной x из некоторой окрестности точки x_0 истинно неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (рис. 177 и 178).

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если для всех значений переменной x из некоторой окрестности точки x_0 истинно неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$ (рис. 179 и 180).

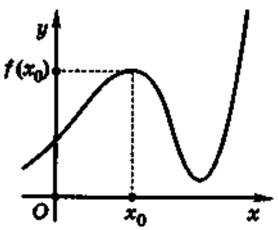
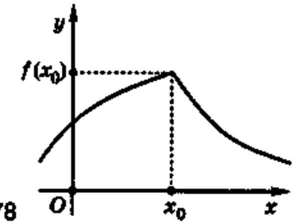
Рис. 177


Рис. 178


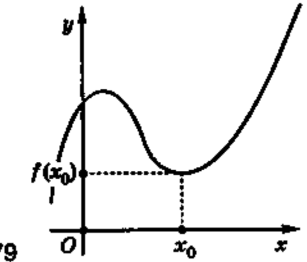


Рис. 179

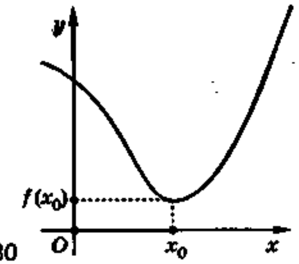


Рис. 180

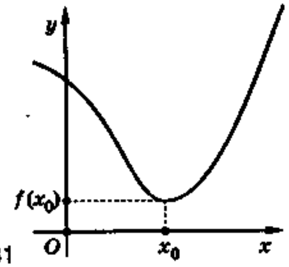


Рис. 181

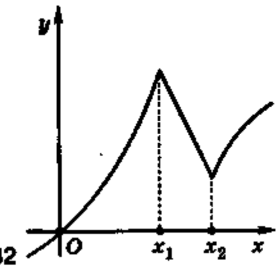


Рис. 182

Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции*, в точке минимума — *минимумом функции*.

Точки максимума и минимума вместе называют *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами функции*.

Свой экстремум функция может иметь в таких внутренних точках ее области определения, в которых производная равна нулю или не существует (рис. 181 и 182). Эти точки называются *критическими точками*.

Теорема 6. ***Если точка x_0 является точкой экстремума функции и в этой точке существует производная, то она равна нулю.***

К этой теореме можно прийти, используя механический смысл производной. Будем рассматривать данную функцию $y = f(x)$ как закон движения материальной точки A по оси ординат y в зависимости от времени x. Пусть в момент x_0 функция достигает своего экстремума, т. е. в момент x_0 точка A занимает на оси y самое высокое (самое низкое) положение. Путь y в момент x_0 перестает возрастать (убывать), поэтому его скорость становится равной нулю, т. е. $f'(x) = 0$.

Теорема 6 называется *теоремой Ферма*.

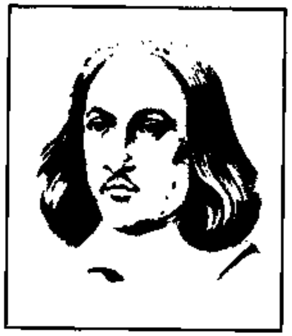


Рис. 183

Пьер Ферма (1601—1665) (рис. 183) — французский математик, юрист по профессии, один из создателей теории чисел, развивал метод координат, работал также в области математического анализа.

Утверждение, обратное теореме Ферма, ложно. Например, производная функции $y = x^3$ в точке 0 обращается в нуль, но в этой точке функция не имеет экстремума (рис. 184).

Свой экстремум функция может иметь в точке, в которой она не имеет производной. Например, функция $y = |x|$ в точке 0 имеет минимум, но производной в этой точке не имеет (рис. 185).

Функция в некоторой точке может не иметь производной, и эта точка может не быть точкой экстремума. Например, как видно из графика функции $y = |x| + 2x$, изображенного на рисунке 186, эта функция в точке 0 не имеет производной и вместе с тем не имеет и экстремума.

Таким образом, критическая точка — это точка возможного экстремума, но вопрос о том, действительно ли данная критическая точка является точкой экстремума, требует дополнительного исследования.

Теорема 7. ***Если при переходе через критическую точку производная функции меняет свой знак с плюса на минус, то эта критическая точка является точкой максимума, а если с минуса на плюс — то точкой минимума.***

Доказательство. Пусть точка x_0 — критическая точка дифференцируемой функции $y = f(x)$.

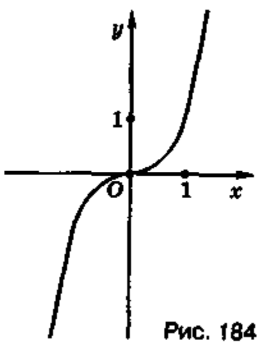


Рис. 184

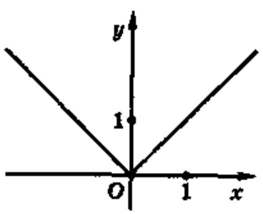


Рис. 185

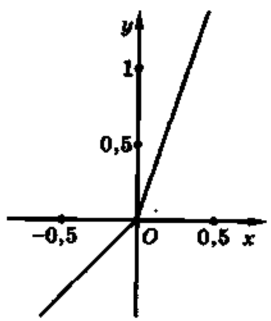


Рис. 186

Пусть $f'(x) > 0$ на промежутке $(a; x_0)$, а $f'(x) < 0$ на промежутке $(x_0; b)$. Тогда в соответствии с теоремой 5 функция $f(x)$ на $(a; x_0)$ возрастает, а на $(x_0; b)$ убывает. Поэтому для всех x из промежутка $(a; b)$ истинно неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, т. е. точка x_0 является точкой максимума.

Пусть $f'(x) < 0$ на промежутке $(a; x_0)$, а $f'(x) > 0$ на промежутке $(x_0; b)$. Тогда в соответствии с теоремой 5 функция $f(x)$ на $(a; x_0)$ убывает, а на $(x_0; b)$ возрастает. Поэтому для всех x из промежутка $(a; b)$ истинно неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$, т. е. точка x_0 является точкой минимума.

Теорема 7 дает *признаки максимума и минимума функции.*

Пример 2. Найдем экстремумы функции $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$.

Производная функции равна $x^3 - 3x^2 - 4x$. Она определена во всех точках области определения функции и превращается в ноль в точках −1, 0, 4.

Поскольку $x^3 - 3x^2 - 4x < 0$ при $x < -1$ и $x^3 - 3x^2 - 4x > 0$ при $-1 < x < 0$, то в точке −1 функция имеет минимум. Найдем его: $\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 = -\frac{3}{4}$.

Поскольку при переходе через точку 0 производная $x^3 - 3x^2 - 4x$ меняет свой знак с плюса на минус, то эта точка является точкой максимума, который равен $\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 0^3 - 2 \cdot 0^2$, т. е. равен 0. Так же устанавливаем, что точка 4 является точкой минимума, который равен $\frac{1}{4} \cdot 4^4 - 4^3 - 2 \cdot 4^2$, т. е. равен −32.

Результаты исследования удобно свести в таблицу.

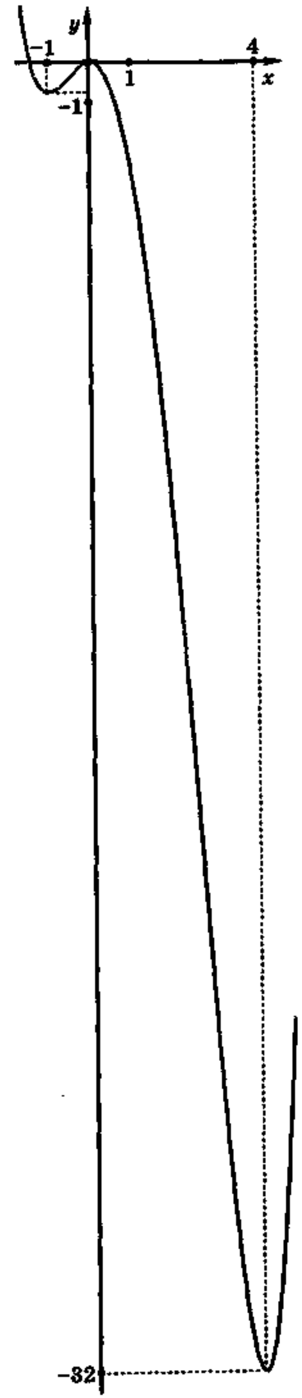


Рис. 187

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	$-\frac{3}{4}$, мин.	↗	0, макс.	↘	-32, мин.	↗

График функции изображен на рисунке 187.

? 1. Сформулируйте теорему Лагранжа.

2. Сформулируйте признак возрастания функции; признак убывания функции.

3. Какая точка области определения функции называется точкой максимума; точкой минимума; точкой экстремума?

4. Какое число называется максимумом функции; минимумом функции; экстремумом функции?

5. Какие точки области определения функции называются критическими точками?

6. Сформулируйте признак максимума функции; признак минимума функции.

258. Дайте определение возрастающей на промежутке функции и, используя его, докажите, что функция $y = x^2 - 4x + 1$ возрастает на промежутке $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 2]$. Постройте график этой функции и определите знак производной $f'(x)$ в указанных промежутках возрастания и убывания.

259. Докажите, что функция $y = x^3 + 4x$ возрастает на всей координатной прямой с помощью:

а) неравенств; б) производной.

260. По графику функции G на рисунке 188 определите:

а) промежутки, на которых производная G' положительна;

б) промежутки, на которых производная G' отрицательна;

в) точки, в которых производная равна нулю;

г) точки, в которых производная не существует.

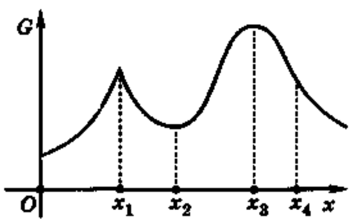


Рис. 188

261. Найдите промежутки, в которых положительна производная функции:

а) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$;

б) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.

262. Определите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $p(y) = 3y + 1$; г) $q(y) = -\frac{1}{4}y - 2$; ж) $p(h) = \frac{2}{3-h}$;

б) $p(y) = \frac{1}{3}y - 1$; д) $p(h) = \frac{2}{h}$; з) $q(h) = 2 - \frac{4}{0{,}5h - 1}$;

в) $q(y) = -4y + 2$; е) $q(h) = -\frac{1}{3h}$; и) $q(x) = \frac{1}{x} + (x-2)^{-2}$.

263. Определите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $k = x^2$; д) $f = x^3 - 27x$;

б) $p = (x-1)^2$; е) $n = x^2(x-3)$;

в) $t = 5x^2 - 3x + 1$; ж) $g = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;

г) $h = x^2 - 2x + 5$; з) $d = 2 - 9x + 3x^2 - x^3$.

264. Определите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = -2x^2 + 3x + 5$; ж) $y = -x^3 + 3x + 2$;

б) $y = (x+1)^2$; з) $y = x^3 + 3x + 1$;

в) $y = 2x^2 - x$; и) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$;

г) $y = 6 - x - x^2$; к) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;

д) $y = x^3 + x$; л) $y = x^4 - 4x^3 + 10$;

е) $y = x^3 - 12x + 1$; м) $y = x^4 - 2x^3 + 24x + 1$.

265. Определите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2$; д) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; и) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$;

б) $y = 3x^5 - 5x^3 - 30x$; е) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; к) $y = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$;

в) $y = x + \frac{1}{x}$; ж) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; л) $y = x - \sqrt{x}$;

г) $y = x - \frac{1}{x}$; з) $y = \frac{x - 2{,}5}{x^2 - 4}$; м) $y = \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$.

266. По графику функции f на рисунке 189 определите:

а) промежутки, на которых производная f' положительна, и промежутки, на которых она отрицательна;

б) точки, где производная равна нулю;

в) точки, где производная не существует.

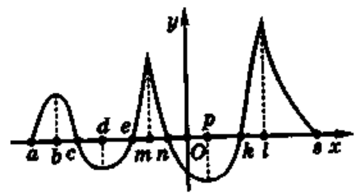


Рис. 189

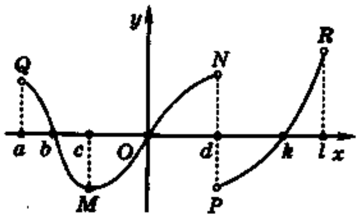


Рис. 190

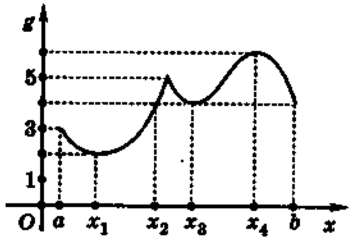


Рис. 191

267. По графику производной функции f на рисунке 190 определите:

а) промежутки возрастания и убывания функции f;
б) точки максимума и минимума функции f;
в) точки, в которых производная функции f не существует.

268. Высота, на которой в момент времени t находится тело, брошенное вертикально вверх, равна $h(t)$. Определите, чему равна производная $h'(t)$ в момент, когда тело достигло наибольшей высоты.

269. На рисунке 191 изображен график функции g. Укажите:

а) точки максимума и минимума функции g;
б) наибольшее и наименьшее значения функции g на промежутке $[a; b]$.

270. Постройте график такой функции f, у которой на промежутке $[a; b]$ какой-либо минимум больше одного из ее максимумов.

271. По графику функции h на рисунке 192 укажите точки, в которых производная функции h:

а) равна нулю; б) не существует.

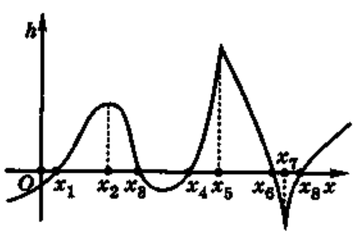


Рис. 192

272. Найдите точку, в которой производная функции $y = x^5$ превращается в нуль. Имеет ли функция в этой точке экстремум?

273. Найдите точки, в которых функция f может иметь экстремум, учитывая, что:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 7$; г) $f(x) = x^3 - 4x + 8$;
б) $f(x) = 10 + 2x - x^2$; д) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;
в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$; е) $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

274. Сколько точек экстремума может иметь:

а) квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$;
б) кубическая функция $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где $a \neq 0$?

275. Исследуйте на экстремум функцию:

а) $y = 3 - x^2$; д) $y = 12x - x^3$;
б) $y = 1 - x - x^2$; е) $y = x^3 - 6x^2$;
в) $y = 1 - x - x^2$; ж) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + 5$;
г) $y = 2x^2 - x + 5$; з) $y = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1$.

276. Найдите точку экстремума функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, и значение этой функции в точке экстремума. Установите, при каком знаке коэффициента a эта точка является точкой максимума, а при каком — точкой минимума функции.

277. С помощью производной найдите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 - 8x + 1$; б) $y = 2x^2 - 8x - 1$.

278. Определите, имеет ли экстремум функция:

а) $y = \frac{1}{x^2}$; в) $y = (x-2)^2$;
б) $y = \frac{1}{x^2+1}$; г) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

279. Верно ли, что функция y не имеет точек экстремума, если:

а) $y = \sqrt[5]{x^2}$; б) $y = \sqrt[5]{x^3}$?

280. Найдите критические точки функции f и установите, какие из них являются точками максимума, а какие — точками минимума, учитывая, что:

а) $f(t) = 2t - 7$; г) $f(t) = 4 - 2t + 7t^2$;
б) $f(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}t$; д) $f(t) = \frac{t}{3} + \frac{3}{t}$;
в) $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t$; е) $f(t) = \frac{t}{8} + \frac{2}{t}$;

ж) $f(t) = t^2 - \frac{1}{2}t^4$;

з) $f(t) = 2t^3 + 6t^2 - 18t + 120$.

281. Найдите критические точки функции g и установите, какие из них являются точками максимума, а какие — точками минимума, учитывая, что:

а) $g(z) = \sqrt{z}$; в) $g(z) = \sqrt{z^2 + 2z}$;

б) $g(a) = \sqrt{a^2 + 1}$; г) $g(a) = \begin{cases} -2a \text{ при } a \leqslant -2, \\ a^2 \text{ при } -2 < a < 2, \\ 6 - a \text{ при } a \geqslant 2. \end{cases}$

282. Найдите промежутки возрастания, промежутки убывания и экстремумы функции:

а) $p(x) = 4x^2 - 6x$; г) $q(x) = 1 + x - x^3$; ж) $n(h) = \frac{(h-2)(8-h)}{h^2}$;

б) $q(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x$; д) $n(h) = \frac{3h-1}{1-4h}$; з) $t(h) = \frac{16}{h(4-h^2)}$;

в) $p(x) = x^3 + 3x^2$; е) $t(h) = \frac{h-3}{2h+4}$; и) $z(t) = \frac{t^2}{(t-2)(8-t)}$.

283. Найдите промежутки возрастания, промежутки убывания и экстремумы функции:

а) $p(t) = 6t^5 + 15t^4 + 10t^3$; в) $p(t) = \frac{t^2}{t^2+3}$;

б) $q(t) = t^4(t-12)^2$; г) $q(t) = \frac{t^2 - 2t + 2}{t-1}$.

284. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума функции:

а) $y = 4 + x - 3x^3$; г) $y = -\frac{3}{(3-x)^2}$;

б) $y = 3x^3 - x + 3$; д) $y = \frac{x-1}{2x+1}$;

в) $y = \frac{4}{(x-2)^2}$; е) $y = \frac{2-x}{3x-1}$.

285. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

а) $y = x + \frac{1}{x}$; в) $y = \frac{x-1}{2} + \frac{8}{x-1} - 1$; д) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$;

б) $y = \frac{x}{4} + \frac{16}{x}$; г) $y = \frac{1+x}{1+4x^2}$; е) $y = 2x - \sqrt{x}$.

286. Производная квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ в точках 3 и 8 равна соответственно 10 и 5. Найдите точку экстремума функции y и определите, является она точкой максимума или минимума.

287. Функция $y = (x-a)(x^2-1)$ имеет минимум в точке $x = \frac{1}{9}$. Определите, в какой точке у нее максимум.

288. Определите, при каких значениях параметра a функции $y = -x^3 + 3ax + 5$ и $y = x^2 + (a+1)x$ имеют минимум в одной точке.

289. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и нарисуйте эскиз графика функции:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$; в) $y = 0{,}5x^4 - 4x^2$;

б) $y = x^3 + 3x - 2$; г) $y = x^4 - 8x^2 + 9$.

290. Докажите, что функция $y = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}$ возрастает на всей числовой прямой. Используя это, докажите, что при $x \geqslant 0$ истинно неравенство $\frac{x^5}{5} + x \geqslant \frac{2}{3}x^3$.

---

291. Решите неравенство:

а) $\frac{x+3}{x(x-1)} > 1$; в) $\sqrt{3x-1} < 5$;

б) $\frac{x^2+3}{x-1} < 2$; г) $\sqrt{5-2x} > 2$.

292. Определите, при каких значениях параметра не имеет решений система:

а) $\begin{cases} 7x - 2ay = 5, \\ (4-3a)x + 4ay = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (a+1)x + 4y = 2a + 4, \\ 2x + (a-1)y = 3a^2 - 22. \end{cases}$

293. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла между диагоналями прямоугольника, у которого одно измерение втрое больше другого.

294. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом в 15° квадрат гипотенузы равен учетверенному произведению катетов.

295. Два тела с суммарной массой 36 кг движутся по одной прямой равноускоренно, первое под воздействием силы в 42 Н, второе с ускорением 5 м/с². Найдите массы тел в отдельности, учитывая, что третье тело массой 19 кг, на которое действует сила, равная сумме сил, действующих на первое и второе тела, движется с ускорением, равным сумме ускорений первого и второго тел.

296. Два тела движутся по одной прямой равноускоренно так, что их ускорения вместе составляют 24 м/с^2. На первое тело действует сила, равная 42 Н, а масса второго тела равна 49 кг. Найдите ускорения каждого тела, учитывая, что третье тело, масса которого равна суммарной массе первого и второго тел, под воздействием силы, равной сумме сил, действующих на первое и второе тела, движется с ускорением 17 м/с^2.

* * *

297. Из чисел от 1 до 50 образовали 10 групп по пять чисел в каждой группе. Определите, какой может быть наибольшая и какой — наименьшая сумма средних по величине чисел из этих 10 групп.

298. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры BM и CN на прямые, которые делят пополам углы C и B. Найдите отрезок MN, учитывая, что $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

299. На доске выписаны числа 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{12}$. Можно ли поставить между ними знаки + и – так, чтобы образовавшееся выражение имело значение 0? Сколько чисел нужно зачеркнуть, чтобы из остальных при определенной расстановке знаков + и – можно было образовать выражение со значением 0?

7. Применение производной

В предыдущем параграфе мы рассмотрели одно из важнейших применений производной к исследованию функций. Рассмотрим задачу об определении наибольшего и наименьшего значений функции на определенном промежутке.

Пусть непрерывная функция f рассматривается на промежутке $[a; b]$ и на нем не имеет критических точек. Тогда на этом промежутке функция или возрастает, или убывает. Значит, свое наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[a; b]$ функция принимает на концах a и b.

Пусть теперь непрерывная функция f рассматривается на промежутке $[a; b]$, на котором она имеет несколько критических точек. Эти точки разделяют промежуток $[a; b]$ на такие промежутки, внутри которых критических точек уже нет. Поэтому наибольшее и наименьшее значения эта функция на том или ином таком промежутке принимает на его концах, т. е. в критических точках или в точках a и b. Значит, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на промежутке $[a; b]$, достаточно найти ее значения в критических точках и на концах a и b, а затем из этих значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 53$ на промежутке $[-3; 2]$.

Найдем критические точки:

$$y' = 6x^2 - 6x - 36 = 0; \quad x = -2 \text{ или } x = 3.$$

Поскольку промежутку $[-3; 4]$ принадлежит только критическая точка -2, то найдем значения функции в этой точке и на концах -3 и 2:

$$y(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 36 \cdot (-3) + 53 = 80;$$
$$y(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 36 \cdot (-2) + 53 = 97;$$
$$y(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 53 = -15.$$

Из полученных чисел 80, 97, –15 выбираем наибольшее и наименьшее:

$$\underset{[-3;\,2]}{y_{\text{наиб}}} = 97; \qquad \underset{[-3;\,2]}{y_{\text{наим}}} = -15.$$

В жизни часто встает *задача отыскания наилучшего, или оптимального, решения*. В тех случаях, когда задачу удается сформулировать на языке математики, она сводится к отысканию наибольшего или наименьшего значения некоторой функции.

Пример 2. Из прямоугольного листа жести, вырезав квадратные уголки, можно сделать открытые коробки различной вместимости (рис. 193). Найдем сторону вырезанного уголка,

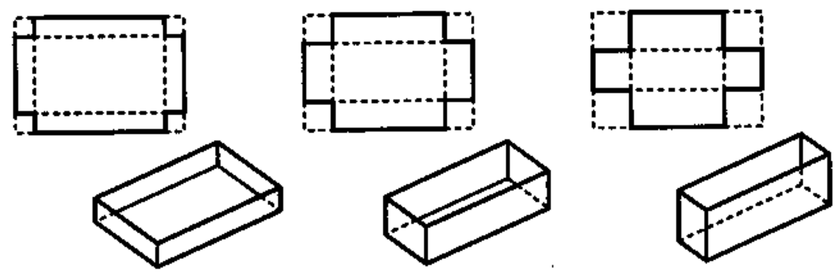


Рис. 193

при которой из листа размерами 10×16 получится коробка наибольшей вместимости.

Пусть a — сторона вырезанного уголка. Тогда каждая сторона прямоугольника уменьшится на $2a$. Значит, измерения коробки равны a, $10-2a$, $16-2a$, и для вместимости V коробки получаем:

$$V=a(10-2a)(16-2a), \text{ или } V=4a^3-52a^2+160a.$$

Легко усмотреть, что переменная a принимает значения из промежутка $[0; 5]$ и на концах этого промежутка переменная V своим значением имеет число 0.

Находим критические точки функции V:

$$V'=12a^2-104a+160=0;$$

$$a=2 \text{ или } a=6\frac{2}{3}.$$

Значение переменной a, равное $6\frac{2}{3}$, не принадлежит области определения. При $a=2$ функция V имеет наибольшее значение, найдем его:

$$V(2)=4\cdot 2^3-52\cdot 2^2+160\cdot 2=144.$$

Следующая теорема дает решение задачи о касательной к графику функции.

Теорема 8. ***Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке A $(x_0; f(x_0))$ задается уравнением***

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Доказательство. Пусть есть график функции $y=f(x)$, на котором выбрана определенная точка $A(x_0; f(x_0))$ (рис. 194). Найдем уравнение касательной к этому графику в точке A.

Как было установлено в параграфе 4, угловой коэффициент a касательной $y=ax+b$ в точке A $(x_0; f(x_0))$ к графику функции $y=f(x)$ равен значению производной в этой точке, т. е. равен $f'(x_0)$. Поэтому уравнение касательной выглядит так:

$$y=f'(x_0)\cdot x+b.$$

Поскольку касательная проходит через точку A, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b.$$

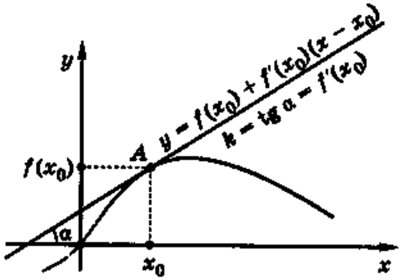


Рис. 194

Поэтому

$$b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$$

и, значит,

$$y=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0,$$

или

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

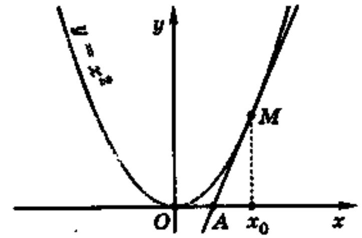


Рис. 195

В результате получаем уравнение касательной:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Пример 3. Докажем, что касательная к параболе $y=x^2$ в точке M с абсциссой x_0, $x_0\neq 0$, пересекает ось абсцисс в точке $A\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$ (рис. 195).

Поскольку $y(x_0)=x_0^2$ и $y'(x_0)=2x_0$, то уравнение касательной запишется так

$$y=x_0^2+2x_0(x-x_0), \text{ или } y=2x_0x-x_0^2.$$

Точка A, в которой касательная пересекает ось абсцисс, имеет ординату, равную нулю, т. е. истинно равенство $0=2x_0x-x_0^2$.

Отсюда $x=\frac{x_0}{2}$.

Установленный факт обосновывает такой способ построения касательной к параболе $y=x^2$ в точке M с абсциссой x_0: найти середину A отрезка оси абсцисс с концами 0 и x_0; провести прямую MA, которая и является искомой касательной.

Производную можно использовать для *приближенных вычислений*. Пусть нужно найти приближенное значение функции $y=f(x)$ в точке x, причем в точке x_0, близкой к точке x, значение функции находится просто (рис. 196). График функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 близок к прямой $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ — касательной к графику в точке x_0. Поэтому верно приближенное равенство $f(x)\approx y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Если разность $x-x_0$ обозначить Δx, то тогда $x=x_0+\Delta x$ и полученное приближенное равенство можно записать в виде:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \quad (1)$$

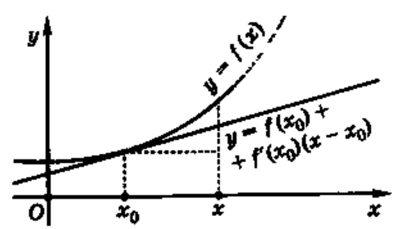


Рис. 196

Пример 4. Рассмотрим степенную функцию $y=x^n$. Выбрав определенное значение x_0 переменной x и применив формулу (1), получаем

$$(x_0+\Delta x)^n \approx x_0^n + n\,x_0^{n-1}\Delta x.$$

Найдем $2{,}997^5$. Здесь $x = 2{,}997$ и $n = 5$. В качестве x_0 удобно взять 3. Тогда $2{,}997^5 = (3-0{,}003)^5 \approx 3^5 + 5\cdot 3^4\cdot(-0{,}003) = 241{,}785$. Вычисления с помощью микрокалькулятора дают значение 241,7874, т. е. относительная погрешность составляет $\left|\frac{241{,}7874-241{,}785}{241{,}785}\right|\cdot 100\ \%$, т. е. $0{,}00099\ \%$.

Найдем $\sqrt[5]{30}$. Здесь в качестве x_0 удобно взять 32. Тогда $\sqrt[5]{30} = 30^{\frac{1}{5}} = (32-2)^{\frac{1}{5}} \approx 32^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5}\cdot 32^{\frac{1}{5}-1}\cdot(-2) = 2 - \frac{2}{5}\cdot 32^{-\frac{4}{5}} = 2 - \frac{2}{5}\cdot\left(32^{\frac{1}{5}}\right)^{-4} = 2 - \frac{2}{5}\cdot(2)^{-4} = 2 - \frac{1}{40} = 1{,}975$. Вычисления с помощью микрокалькулятора дают значение 1,97435, т. е. относительная погрешность составляет $\left|\frac{1{,}97435-1{,}975}{1{,}975}\right|\cdot 100\ \%$, т. е. $0{,}033\ \%$.

?

1. Сформулируйте признак возрастания функции; признак убывания функции.
2. Сформулируйте признак максимума функции; признак минимума функции.
3. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на данном промежутке.
4. Запишите уравнение касательной к графику функции в данной точке.
5. Как можно построить касательную к параболе $y = x^2$ в точке с данной абсциссой?
6. Запишите равенство, которое позволяет находить приближенное значение функции в данной точке.

300. Нарисуйте график функции $f(x) = -x^2 + 4x$. Найдите ее наибольшее значение на промежутке:

а) $[0;\ 1]$; б) $[1;\ 2]$; в) $[1;\ 3]$.

301. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на промежутке $[a;\ b]$, учитывая, что:

а) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$, $a = 0$, $b = 1$;
б) $f(x) = x^2 + 4x - 2$, $a = -3$, $b = 1$;
в) $f(x) = x^3 + 3x$, $a = 0$, $b = 2$;
г) $f(x) = x^3 - 3x$, $a = -1$, $b = 3$;
д) $f(x) = \frac{4}{x} + x - 3$, $a = 1$, $b = 4$;
е) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x$, $a = 0$, $b = 4$.

302. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на промежутке $[a;\ b]$, учитывая, что:

а) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ и $[a;\ b] = [-4;\ 4]$;
б) $f(x) = (3x^2 - 6x + 4)^2$ и $[a;\ b] = [0;\ 3]$;
в) $f(x) = (x^4 - 1)^3$ и $[a;\ b] = [-1;\ 2]$;
г) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ и $[a;\ b] = [0;\ 2]$.

303. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на промежутке A, учитывая, что:

а) $f(x) = 1{,}5x^2 + \frac{81}{x}$, $A = [1;\ 4]$;
б) $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$, $A = [-5;\ -2{,}5]$.

304. Есть функция f. Сравните ее наибольшее значение на промежутке A с наименьшим значением на промежутке B, учитывая, что:

а) $f(t) = t^3 + 3t^2 - 9t$, $A = [-4;\ 0]$, $B = [3;\ 4]$;
б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$, $A = \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$, $B = [2;\ 3]$.

305. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $f(t) = t^4 - 8t^2 - 9$ на промежутке $[-1;\ 1]$ и на промежутке $[0;\ 3]$;
б) $g(x) = 3x^5 - 5x^3 - 9$ на промежутке $[0;\ 2]$ и на промежутке $[2;\ 3]$;
в) $u(a) = \frac{a^2+4}{a}$ на промежутке $[-4;\ -1]$ и на промежутке $[1;\ 3]$;
г) $h(c) = \frac{c^2+4}{c}$ на промежутке $[-3;\ -2]$ и на промежутке $[1;\ 5]$.

306. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[a;\ b]$, учитывая, что:

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$, $[a;\ b] = [-1;\ 1]$;
б) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$, $[a;\ b] = [-1;\ 2]$;
в) $f(x) = 7 + 4x^3 - x^4$, $[a;\ b] = [-1;\ 3]$;
г) $f(x) = 5x - \frac{5}{3}x^3$, $[a;\ b] = [0;\ 2]$;
д) $f(x) = \frac{2x^2-9x-2}{x^2-5x-6}$, $[a;\ b] = [0;\ 2]$;
е) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[a;\ b] = \left[\frac{1}{2};\ 4\right]$;
ж) $f(x) = \sqrt{x} - x$, $[a;\ b] = [0;\ 4]$;
з) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $[a;\ b] = [0;\ 9]$;

и) $f(x)=7x^3+9x^2-3x+6$, $[a; b]=[-1; 1]$;
к) $f(x)=2x^3-15x^2+36x-13$, $[a; b]=\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

307. Докажите, что если $|x| \leqslant 2$, то $|x^3-3x| \leqslant 2$.

308. Докажите, что уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень на промежутке A и на промежутке B, учитывая, что:

а) $f(x)=x^3-27x+2$, $A=[-1; 1]$, $B=[4; 6]$;
б) $f(x)=x^4-4x-9$, $A=[-2; 0]$, $B=[2; 3]$;
в) $f(x)=x^4+6x^2-8$, $A=[-2; -1]$, $B=[1; 2]$;
г) $f(x)=-1+3x^2-x^3$, $A=[-2; 0]$, $B=[2; 3]$.

309. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $4x^3-3x=a$ имеет только один корень.

310. Найдите количество корней уравнения:

а) $x^3-3x^2+6x-1=0$; в) $12x^4-12x^3-3x^2-5=0$;
б) $5x^3-5x-3=0$; г) $x^4+x^3=10$.

311. Найдите такое положительное число, что:

а) сумма его и обратного ему числа наименьшая;
б) сумма его и квадрата обратного ему числа наименьшая;
в) разность его и его куба наибольшая.

312. Представьте число:

а) 16 суммой двух таких неотрицательных чисел, чтобы их произведение было наибольшим;
б) 36 произведением двух таких неотрицательных чисел, чтобы их сумма была наименьшей.

313. Докажите, что:

а) произведение двух положительных чисел, сумма которых равна s, имеет наибольшее значение, если множители равны друг другу.
б) сумма двух положительных чисел, произведение которых равно p, имеет наименьшее значение, если слагаемые равны друг другу.

314. Площадь прямоугольника равна 64 см^2. Определите, какую длину должны иметь его стороны, чтобы периметр был наименьший.

315. Представьте число:

а) 10 суммой двух таких положительных чисел, чтобы сумма их квадратов была наименьшей;

б) 8 суммой двух таких положительных чисел, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

316. Из всех прямоугольников с периметром 20 см найдите тот, у которого диагональ наименьшая.

317. Кусок проволоки длиной 48 м сгибают так, чтобы образовался прямоугольник. Определите, какими должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей.

318. Представьте число:

а) 8 суммой двух таких положительных чисел, что сумма куба одного слагаемого и квадрата второго наименьшая из возможных;
б) 54 суммой трех таких положительных чисел, что два из них пропорциональны числам 1 и 2, а произведение всех слагаемых наибольшее из возможных.

319. Есть 200 м проволочной сетки. Определите размеры огражденного этой сеткой прямоугольного загона наибольшей площади, ограниченного с одной стороны рекой.

320. Нужно выгородить прямоугольное пастбище площадью 1 км^2 и разделить его на два прямоугольных участка. Определите наименьшее значение длины ограждения такого пастбища.

321. На двух строительных площадках возводятся два одноэтажных склада общей площадью 600 м^2. Учитывая, что стоимость строительства склада прямо пропорциональна квадрату его площади и строительство 1 м^2 на второй площадке стоит на 40 % дороже, чем на первой, определите, какой должна быть площадь каждого склада, чтобы стоимость строительства была наименьшей.

322. Точка M — середина отрезка AB. Найдите точку X на этом отрезке, для которой произведение длин отрезков AX, MX и XB наибольшее.

323. Определите стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в треугольник с основанием a и высотой h.

324. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг так, что одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга, найдите прямоугольник наибольшей площади.

325. Стороны AB, BC и CD трапеции $ABCD$ равны 1 каждая и сторона AD больше стороны BC. Определите, каким должен быть угол CDA, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

326. Из прямоугольного листа жести размерами $a \times b$, вырезав квадратные уголки, нужно сделать открытую коробку. Определите, какой должна быть сторона вырезанного квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим.

327. Нужно сделать коробку без крышки с прямоугольным основанием и объемом V, отношение сторон основания которой было бы равно k. Определите, какими должны быть размеры коробки, чтобы ее поверхность была наименьшей, учитывая, что:

а) $k = 1$, $V = 32$; б) $k = 2$, $V = 36$.

328. Объем V прямой четырехугольной призмы с квадратным основанием равен 8 см^3. Определите, какой должна быть сторона a основания и высота h призмы, чтобы площадь ее поверхности была наименьшей, учитывая, что объем V призмы и ее боковая поверхность S определяются по формулам $V = S_{осн}h$ и $S = Ph$, где $S_{осн}$ —площадь основания, P — периметр основания (рис. 197).

329. Поверхность коробки без верхней крышки в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 300 см^2. Определите размеры коробки, учитывая, что ее объем наибольший из возможных.

330. Бак цилиндрической формы должен вмещать V литров воды. Определите, какими должны быть размеры такого бака, чтобы его поверхность без крышки была наименьшей, учитывая, что боковая поверхность цилиндра $S_{бок}$ и его объем V определяются формулами $S_{бок} = 2\pi rh$ и $V = \pi r^2 h$, где r — радиус основания цилиндра, а h — его высота (рис. 198).

331. Определите, какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь цилиндр, объем которого равен V (см. рис. 198).

332. Найдите, какую наименьшую поверхность может иметь тело с объемом Q, представляющее собой прямой круговой цилиндр, завершенный полушаром (рис. 199), учитывая, что объем V и боковая поверхность $S_{бок}$ цилиндра определяются формулами $V = S_{осн}h$ и $S_{бок} = Ch$, где $S_{осн}$ — площадь основания цилиндра, C — длина окружности этого основания, а объем V и поверхность S шара — формулами $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ и $S = 4\pi R^2$, где R — радиус шара.

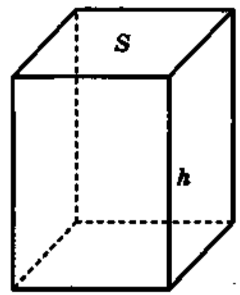


Рис. 197

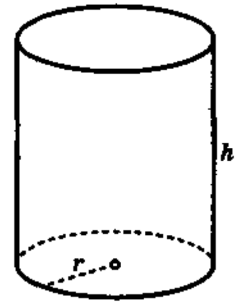


Рис. 198

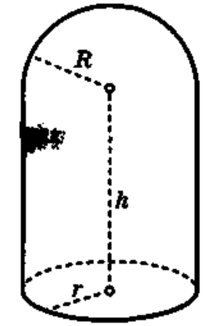


Рис. 199

333. Лодка находится на озере на расстоянии 3 км от ближайшей точки A берега. Пассажир лодки хочет попасть в точку B, которая находится на берегу на расстоянии 5 км от A (участок AB берега считаем прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может за час пройти 5 км. К какой точке берега должна пристать лодка, чтобы пассажир попал в B за кратчайшее время?

334. Укажите точки, в которых нельзя провести касательную к графику функции:

а) $y = |x - 3|$; в) $y = \sqrt[3]{x^2}$;
б) $y = |x - 1| + |x + 2|$; г) $y = |x^2 - x|$.

335. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции f в точке A, учитывая, что:

а) $f(x) = x^2$, $A(-4; 16)$; в) $f(x) = x^3$, $A(-2; -8)$;
б) $f(x) = \frac{4x - x^2}{4}$, $A(0; 0)$; г) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $A(1; -2)$.

336. Определите, в какой точке кривой $y = -\frac{1}{2}x^2$ касательная наклонена к оси x под углом:

а) 45°; б) 135°.

337. Определите, в какой точке графика функции $g = \sqrt{c}$ касательная наклонена к оси абсцисс:

а) под углом 45°; б) под углом 60°.

338. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке:

а) $x = 1$; б) $x = -1$; в) $x = \frac{1}{2}$; г) $x = -\frac{1}{4}$.

339. Напишите уравнение касательной к параболе $y = 2 - \frac{x}{2} - x^2$ в точке пересечения ее с осью ординат.

340. Найдите уравнение касательной к гиперболе $y = \frac{1}{x+1}$ в точке $x = 0$ и постройте эти гиперболу и касательную.

341. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{(x-2)^3}$ в точке с абсциссой:

а) $x = 0$; б) $x = 1$.

342. На параболе $y = x^2 - 4x$ найдите точку, в которой касательная к параболе параллельна оси абсцисс.

343. Определите, в какой точке касательная к кубической параболе $y = x^3$ параллельна прямой $y = 3x - 5$.

344. Определите, в каких точках графика функции $y = \frac{x}{x^2+1}$ касательная:

а) параллельна оси абсцисс;
б) составляет с осью абсцисс угол 45°;
в) параллельна прямой $y = \frac{2}{9}x + 1$;
г) перпендикулярна прямой $y = 8x + 3$.

345. Постройте в тетради параболы $y = 2x - x^2$ и $y = x^2 - 4$ и касательные к ним в точках пересечения. Найдите уравнения этих касательных. Определите угол между касательными.

346. Найдите точку пересечения линий $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ и запишите уравнения касательных к этим линиям, проведенных через точку пересечения. Определите угол между этими касательными.

347. Найдите:

а) координаты точки параболы $y = x^2 - x$, в которой касательная проходит через точку M (2; 0,25);
б) касательную к кривой $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$, которая проходит через точку N (−2; 3).

348. К гиперболе $y = \frac{1}{x}$ проведена произвольная касательная. Докажите, что площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат, равна 2.

349. Вычислите приближенно:

а) $\sqrt[3]{1,012}$; б) $\sqrt[5]{30}$; в) $\sqrt[4]{80}$; г) $\sqrt[5]{9,02}$.

350. Найдите приближенное значение функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ при:

а) $x = 2,0057$; б) $x = 1,974$.

351. Найдите приближенное значение функции $f(x)$ в точке x_0, учитывая, что:

а) $f(x) = 2x^5$, $x_0 = 1,003$;
б) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, $x_0 = 2,04$;
в) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $x_0 = 1,97$;
г) $f(x) = 5\sqrt{x}$, $x_0 = 4,02$.

352. Найдите приближенное значение функции f в точках x_1 и x_2, учитывая, что:

а) $f(x) = 2x^4 - x$, $x_1 = 2,017$ и $x_2 = 0,94$;
б) $f(x) = x^5 - 2x^2$, $x_1 = 1,994$ и $x_2 = 0,95$;
в) $f(x) = 3x^3 - x$, $x_1 = 4,03$ и $x_2 = 0,92$;
г) $f(x) = x^2 + 4x$, $x_1 = 5,08$ и $x_2 = 1,97$.

353. Вычислите приближенно $\sqrt{1,06}$ и, доказав неравенства $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ при положительных x, оцените погрешность вычисления.

354. Приближенное значение $\sqrt{2}$ можно высчитать, если использовать представление числа 2 произведением $4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$ или суммой $1 + 1$. Определите, в каком случае полученное приближение более точное.

355. Найдите приближенное значение выражения:

а) $\sqrt{1,004}$; в) $\sqrt{0,994}$; д) $\sqrt{26}$; ж) $\sqrt{15,84}$;
б) $\sqrt{25,011}$; г) $\sqrt{0,991}$; е) $\sqrt{49,021}$; з) $\sqrt{81,75}$.

356. Найдите приближенное значение выражения:

а) $\frac{1}{1,003^{20}}$; в) $\frac{1}{0,9994^{13}}$; д) $\frac{2}{0,994^{60}}$;
б) $\frac{1}{0,998^{40}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{1,04}}$; е) $\frac{2}{1,0015^{70}}$.

357. Из рисунков 200—211 укажите тот, на котором изображен график функции, заданной формулой:

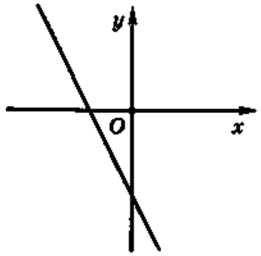


Рис. 200

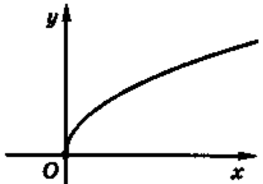


Рис. 201

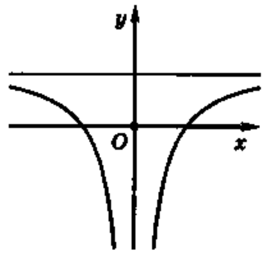


Рис. 202

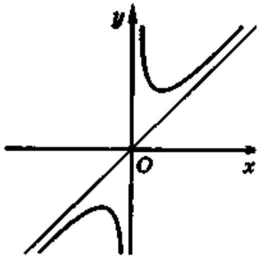


Рис. 203

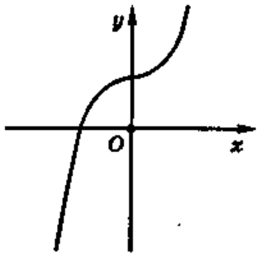


Рис. 204

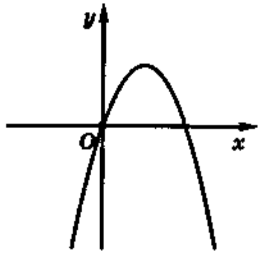


Рис. 205

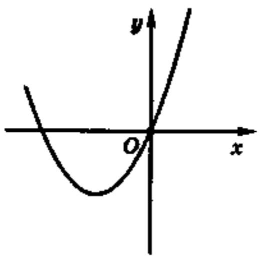


Рис. 206

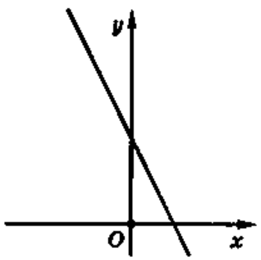


Рис. 207

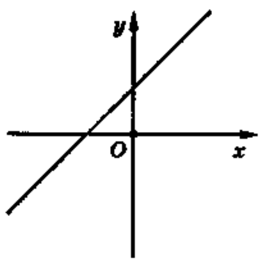


Рис. 208

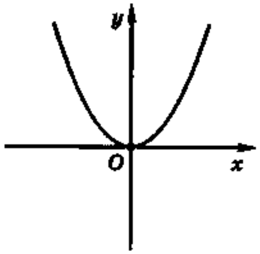


Рис. 209

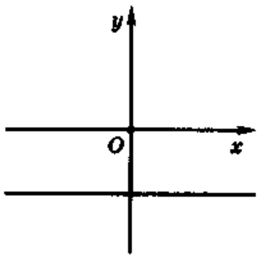


Рис. 210

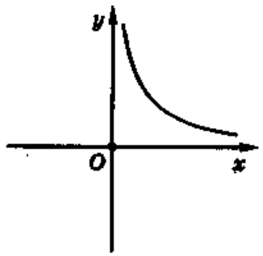


Рис. 211

а) $y = x^3 + 1$; д) $y = \sqrt{x}$; и) $y = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{7}{2}$;

б) $y = 4x - x^2$; е) $y = 1 - \frac{1}{x^2}$; к) $y = -2x + 4$;

в) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; ж) $y = x + \frac{1}{x}$; л) $y = -2x - 4$;

г) $y = 3x^2$; з) $y = x + 5$; м) $y = -2$.

358. Определите, что будет производной площади круга как функции радиуса. Как объяснить этот результат?

359. Докажите, что треугольник ABC, в котором $AB = 2AC \cos A$, является равнобедренным.

360. Меньшая сторона треугольника равна 11 см, а разность двух других — 4 см. Найдите косинусы углов этого треугольника, учитывая, что средний по величине угол равен 60°.

361. С двух полей суммарной площадью 121 га было собрано 6300 ц пшеницы. Урожайность на первом поле составила 56 ц/га, на втором — 49 ц/га. Найдите урожай, собранный с первого поля.

362. Урожайности пшеницы с двух участков площадью 65 га и 50 га в сумме составили 117 ц/га. Определите, сколько зерна собрали с каждого участка, учитывая, что урожайность на поле, состоящем из этих участков, оказалась равной 57 ц/га.

* * *

363. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 1 \leqslant 0, \\ 2y^2 + 2y - x \leqslant 0. \end{cases}$$

364. На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ отмечены такие точки F и G, что треугольник CFG — правильный. Найдите площадь треугольника AFG, учитывая, что площади треугольников CBF и CDG равны соответственно S_1 и S_2.

365. В однокруговом турнире участвуют 8 команд, из которых 4 выходят в финал. Какое наименьшее количество очков должна набрать команда, чтобы обеспечить себе выход в финал, если за победу дается 2 очка, за ничью — 1 очко, а за поражение — 0?

8. Первообразная функции

Мы знаем, что операция дифференцирования ставит в соответствие данной функции $f(x)$ новую функцию — ее производную, функцию $f'(x)$. Тут мы рассмотрим обратную задачу: для данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой и есть $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на определенном промежутке, если для всех значений переменной x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Функция $F(x) = 3x^4$ является первообразной для функции $12x^3$ на множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел, так как

$$F'(x) = (3x^4)' = 3(x^4)' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3 = f(x)$$

для всех значений переменной x из $\boldsymbol{R}$.

В дальнейшем, если промежуток не указан явно, будем предполагать, что рассматривается максимальная область, на которой функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Теорема 9. ***Если $F'(x) = 0$ на определенном промежутке, то функция F — постоянная на этом промежутке.***

Доказательство. Пусть есть функция $F(x)$, которая на промежутке A имеет производную $F'(x)$, причем $F'(x) = 0$ на этом промежутке. Выберем какое-либо число x_0 из промежутка A. Тогда в соответствии с теоремой Лагранжа для любого значения переменной x из этого промежутка существует такое число c, заключенное между x и x_0, что

$$F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0).$$

Поскольку число c принадлежит промежутку A, то $F'(c) = 0$. Значит,

$$F(x) - F(x_0) = 0, \text{ или } F(x) = F(x_0).$$

Мы получили, что для всех значений переменной x из промежутка A истинно равенство

$$F(x) = F(x_0),$$

а это означает, что на промежутке A функция $F(x)$ имеет одно и то же значение, т. е. постоянная.

Пример 2. Любая функция $F(x) = 2\sqrt{x} + C$, где C — постоянная, является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, так как

$$F'(x) = (2\sqrt{x} + C)' = (2\sqrt{x})' + C' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x).$$

Теорема 10. ***Любая первообразная для функции f на определенном промежутке может быть представлена формулой $F(x) + C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная для функции f на этом промежутке, а C — постоянная.***

Доказательство. Пусть есть функции $f(x)$ и $F(x)$, причем на промежутке A истинно равенство $F'(x) = f(x)$.

Докажем сначала, что для любой константы C выражение $F(x) + C$ представляет первообразную функции $f(x)$. Будем иметь:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

т. е. $F(x) + C$ — первообразная для функции $f(x)$.

Докажем теперь, что любые две первообразные для функции $f(x)$ отличаются на постоянную величину. Пусть $G(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$ на том же промежутке A, т. е. $G'(x) = f(x)$ для всех значений переменной x из промежутка A. Тогда

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

По теореме 9 разность $G(x) - F(x)$ есть постоянная функция C, т. е. для всех значений переменной x из промежутка A истинно равенство $G(x) - F(x) = C$, или $G(x) = F(x) + C$.

Формулу $F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$, называют *формулой общего вида первообразной для функции f*.

Теорема 10 выражает *основное свойство первообразных*, которое имеет следующий геометрический смысл: график любой первообразной функции $f(x)$ получается из графика определенной первообразной для этой функции параллельным переносом вдоль оси ординат (рис. 212).

Пример 3. Для функции $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ найдем первообразную, график которой проходит через точку $P(4; -5)$.

Совокупность всех первообразных представляет формула $F(x) = -4\sqrt{x} + C$. Графики некоторых из этих первообразных изображены на рисунке 213. Координаты точки P графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению $-5 = -4\sqrt{4} + C$. Значит, $C = 3$ и $F(x) = -4\sqrt{4} + 3$.

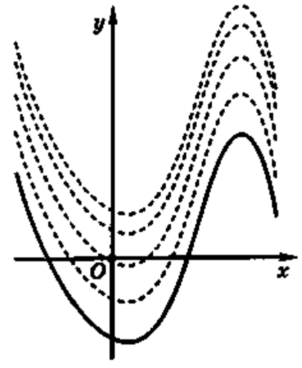
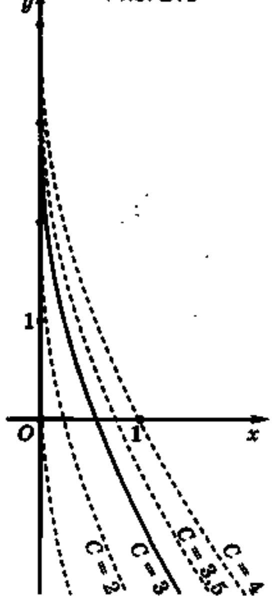


Рис. 212

Теорема 11. ***Если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, а a и b — определенные числа, то:***

Рис. 213



$F(x) + G(x)$ — первообразная для функции $f(x) + g(x)$;

$aF(x)$ — первообразная для функции $af(x)$;

$\frac{1}{a}F(ax+b)$ — первообразная для функции $f(ax+b)$.

Доказательство. Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$, а a и b — определенные числа.

По теореме о производной суммы функций получаем:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Поскольку по следствию из теоремы 2 постоянный множитель можно выносить за знак производной, то

$$(aF(x))' = aF'(x) = af(x).$$

Используя теорему 4 о производной сложной функции, получаем:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}\cdot F'(ax+b)\cdot(ax+b)' =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot f(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

Пример 4. Найдем формулу общего вида первообразной для функции $f(u) = \frac{7}{(4-7u)^6}$.

Сначала найдем первообразную для функции $\frac{1}{x^6}$, учитывая, что $\frac{1}{x^6} = x^{-6}$. Эта первообразная есть $\frac{1}{-6+1}x^{-6+1}$, или $\frac{1}{-5}x^{-5}$, или $-\frac{1}{5x^5}$. Поэтому

$$F(u) = \frac{1}{-7}\cdot\frac{7}{-5(4-7u)^5} = \frac{1}{5(4-7u)^5}.$$

Теорема 12. ***Первообразными для постоянной функции k, степенной функции x^n при целом значении показателя n, не равном -1, функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ являются функции $kx + C$, $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, $2\sqrt{x} + C$ соответственно.***

Доказательство этой теоремы проведите самостоятельно.

Пример 5. Найдем формулу общего вида первообразной для функции $f(t) = 3t^4 - \frac{1}{t^2}$.

Первообразными для функций $3t^4$ и $\frac{1}{t^2}$ являются функции $\frac{3}{5}t^5$ и $-\frac{1}{t}$. Поэтому функция $\frac{3}{5}t^5 - \left(-\frac{1}{t}\right)$ является первообразной для функции $3t^4 - \frac{1}{t^2}$. А все первообразные для этой функции представляет формула $F(t) = \frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{t} + C$.

Пример 6. Материальная точка массой 5 кг движется по прямой под воздействием силы $F(t) = (5t - 3)$ Н, направленной вдоль этой прямой. Найдем закон $s(t)$ движения точки, учитывая, что в момент времени t, равный 30 с, скорость точки v и пройденный путь s соответственно равны 400 м/с и 3000 м.

Учитывая второй закон Ньютона, получаем:

$$a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{5t-3}{5} = t - \frac{3}{5}.$$

Скорость $v(t)$ движения точки есть первообразная для ускорения $a(t)$, поэтому

$$v(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{5}t + C_1.$$

Постоянную C_1 найдем, учитывая условие $v(30) = 400$:

$$400 = \frac{1}{2}\cdot 30^2 - \frac{3}{5}\cdot 30 + C_1;\ C_1 = -32.$$

Значит,

$$v(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{5}t - 32.$$

Пройденный точкой путь $s(t)$ является первообразной для скорости $v(t)$, поэтому

$$s(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{10}t^2 - 32t + C_2.$$

Постоянную C_2 найдем, учитывая условие $s(30) = 3000$:

$$3000 = \frac{1}{6}\cdot 30^3 - \frac{3}{10}\cdot 30^2 - 32\cdot 30 + C_2;\ C_2 = -270.$$

Значит, точка движется по закону

$$s(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{10}t^2 - 32t - 270.$$

В этом примере при нахождении скорости $v(t)$ мы учли то, что

$$a(t) = v'(t) = t - \frac{3}{5},$$

а при нахождении пути $s(t)$ — то, что

$$v(t) = s'(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{5}t - 32.$$

В обоих случаях неизвестные функции $v(t)$ и $s(t)$ связаны равенством со своими производными $v'(t)$ и $s'(t)$, соответственно равными $t-\frac{3}{5}$ и $\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{5}t-32$. Нахождение этих функций сводилось к отысканию соответствующих первообразных.

Уравнение, которое связывает определенную функцию и ее производные, называется *дифференциальным уравнением.*

В примере 6 мы решили дифференциальные уравнения $v'(t)=t-\frac{3}{5}$ и $s'(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{5}t-32$ и этим самым решили дифференциальное уравнение $s''(t)=t-\frac{3}{5}$, где $s''=(s')'$.

Многие физические законы являются дифференциальными уравнениями. Например, второй закон Ньютона есть дифференциальное уравнение $ms''=F$, которое называют *уравнением механического движения.*

?

1. Какая функция называется первообразной для данной функции?
2. Какой вид имеет функция, производная которой равна нулю?
3. Какой формулой представляются все первообразные для определенной функции?
4. Сформулируйте основное свойство первообразных и укажите, как оно представляется геометрически.
5. Сформулируйте правила нахождения первообразной для суммы двух функций; произведения функции на постоянную; функции $f(ax+b)$.
6. Какой формулой представляются первообразные постоянной функции; степенной функции; функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$?
7. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением?
8. Запишите уравнение механического движения.

366. Докажите, что функция F является первообразной для функции f:

а) $F(x)=x^5,\ f(x)=5x^4$;
б) $F(t)=t^{-4},\ f(t)=-4t^{-5}$;
в) $F(u)=\frac{1}{8}u^8,\ f(u)=u^7$;
г) $F(v)=-\frac{1}{9}v^{-9},\ f(v)=v^{-10}$.

367. Определите, является ли функция F первообразной для функции f:

а) $F(x)=3-x^{-3},\ f(x)=-3x^{-4}$;
б) $F(x)=7-x^7,\ f(x)=-7x^6$;
в) $F(v)=v^2-v^{-2},\ f(v)=2v+2v^{-3}$;
г) $F(x)=-\frac{1}{6}x^{-6},\ f(x)=x^{-7}$.

368. Есть 3 функции. Из них укажите такую функцию, что из двух других одна является ее производной, а другая — первообразной:

а) $f(x)=-\frac{1}{x},\ g(x)=-\frac{2}{x^3},\ h(x)=\frac{1}{x^2}$;

б) $f(t)=2t+\frac{1}{2\sqrt{t}},\ g(t)=t^2-\sqrt{t},\ h(t)=2+\frac{1}{4\sqrt{t^3}}$;
в) $f(u)=u+2,\ g(u)=1,\ h(u)=\frac{u^2}{2}+2u$;
г) $f(v)=v^{-2}-v^{-1},\ g(v)=6v^{-4}-2v^{-3},\ h(v)=-2v^{-3}+v^{-2}$.

369. Найдите одну из первообразных для функции:

а) $f(x)=4{,}7$;
б) $f(x)=3x$;
в) $f(x)=3x^2$;
г) $f(t)=-7{,}2$;
д) $f(t)=-3t^2$;
е) $f(t)=-4t^3$;
ж) $f(s)=-s$;
з) $f(s)=s^{-2}$;
и) $f(s)=-2s^{-3}$;
к) $f(u)=-\frac{1}{7}u^{-6}$;
л) $f(u)=\frac{1}{7}u^6$;
м) $f(u)=4u^{-3}$.

370. Найдите одну из первообразных для функции:

а) $f(x)=x+4$;
б) $f(x)=x^2-3x$;
в) $f(x)=x^3+4x^2$;
г) $f(t)=t^{-2}+t$;
д) $f(t)=t^2-t^{-2}$;
е) $f(t)=3-t^{-3}$;
ж) $f(z)=\sqrt{z}+z$;
з) $f(z)=\sqrt[3]{3z}+z^3$;
и) $f(z)=\sqrt[3]{4z^2}-\sqrt{z}$.

371. Найдите какие-либо две первообразные для функции:

а) $f(x)=x^3$;
б) $f(x)=3x-3x^2$;
в) $f(x)=4-x^{-4}$;
г) $f(x)=x^{-2}-x^{-3}$;
д) $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$;
е) $f(x)=x^{-3}-\frac{1}{x^2}$;
ж) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}$;
з) $f(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$;
и) $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2x+2}}$.

372. Найдите формулу общего вида первообразных для функции:

а) $f(x)=2-x$;
б) $f(x)=3x^2$;
в) $f(x)=6x^3$;
г) $g(x)=2+x$;
д) $g(x)=-7$;
е) $g(x)=x^{11}$;
ж) $f(t)=\frac{1}{t^2}$;
з) $f(t)=3-\frac{1}{t^3}$;
и) $f(t)=t+\frac{1}{t^4}$;
к) $g(t)=\sqrt{t}$;
л) $g(t)=2+\sqrt{t}$;
м) $g(t)=t-\sqrt{t}$.

373. Запишите формулу общего вида первообразных для функции:

а) $f(x)=3-x^2+\frac{1}{x^2}$;
б) $f(x)=2x+\frac{2}{x^4}+\sqrt{x}$;
в) $f(x)=1-\frac{1}{x^3}+4x^3$;
г) $f(x)=5x^2-3x-7$;
д) $g(t)=(3t-7)^4$;
е) $g(t)=\sqrt{3t-4}$;
ж) $g(t)=(3-2t)^7$;
з) $g(t)=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{4t+1}$;

и) $h(y)=\frac{3}{(5-11y)^4}$; л) $h(y)=\frac{7}{\sqrt{(5y+2)^3}}$;

к) $h(y)=\frac{3}{(5y+1)^3}$; м) $h(y)=-\frac{2}{y^2}-\frac{3}{\sqrt[4]{(y-1)^3}}$.

374. Найдите формулу общего вида первообразных для функции:

а) $f(x)=1-\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x-3}$;

б) $g(t)=\frac{1}{t^3}+\frac{2}{\sqrt{t^3}}-3t^3$;

в) $h(s)=\frac{4}{(4-3s)^3}-3(5-6s^2)^3$;

г) $q(a)=-\frac{2}{\sqrt[3]{(a-1)^4}}-2(5a^2-3)^3$;

д) $p(x)=\frac{4}{(4-3x)^3}+\frac{3}{\sqrt{3x-2}}-2(3x^3-1)^2$;

е) $r(y)=11(y^3-3y+5)^2-\frac{5}{\sqrt[4]{6y-2}}$.

375. Для функции f найдите такую первообразную F, которая в указанной точке имеет указанное значение:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right)=-12$; в) $f(s)=4s^2$, $F(-3)=-36$;

б) $f(t)=x^3$, $F(-1)=2$; г) $f(u)=\sqrt{u}+1$, $F(9)=27$.

376. Найдите первообразную для функции f, которая проходит через точку M, учитывая, что:

а) $f(t)=2t+1$, $M(0;\ 0)$; в) $f(x)=x+2$, $M(1;\ 3)$;

б) $f(y)=3y^2-2y$, $M(1;\ 4)$; г) $f(t)=3t-t^2$, $M(2;\ -1)$.

377. Найдите ту первообразную для функции f, которая проходит через точку K, учитывая, что:

а) $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$, $K(-1;\ 4)$; в) $f(u)=u^3+2$, $K(2;\ 15)$;

б) $f(t)=1-2t$, $K(3;\ 2)$; г) $f(z)=\frac{1}{z^3}-10z^4+3$, $K(1;\ 5)$.

378. Найдите две такие первообразные для функции f, что расстояние между соответствующими точками их графиков равно d, учитывая, что:

а) $f(x)=2-x-x^2$, $d=4$; в) $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{3}{4}}$, $d=4$;

б) $f(x)=x^3-x^{-2}$, $d=\frac{2}{3}$; г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-3x$, $d=3$.

379. Графикам первообразных F_1 и F_2 функции f принадлежат точки X и Y соответственно. Найдите разность этих первообразных и определите, который из графиков расположен ниже, учитывая, что:

а) $f(t)=3t^2-2t+4$, $X(-1;\ 1)$, $Y(0;\ 3)$;
б) $g(y)=4y-6y^2+1$, $X(0;\ 2)$, $Y(1;\ 3)$;
в) $h(c)=4c-c^3$, $X(2;\ 1)$, $Y(-2;\ 3)$;
г) $r(a)=(2a+1)^2$, $X(-3;\ -1)$, $Y\left(1;\ \frac{19}{3}\right)$.

380. Найдите закон движения точки, т. е. зависимость ее координаты $x(t)$ от времени t, учитывая, что в момент времени t, равный:

а) нулю, точка находится в начале отсчета, а движение происходит по прямой со скоростью $v(t)=t^2-2t+1$;
б) 3, пройденный путь был равен 36, а движение происходит по прямой со скоростью $v(t)=3+2t+2t^2$;
в) 1, его скорость была равной 10 м/с, пройденный путь — 12 м, а движение происходит по прямой с ускорением $a(t)=(12t^2+4)$ м/с^2.

381. Материальная точка движется с ускорением $a(t)$, причем в момент времени t_0 ее скорость и координата соответственно равны v_0 и x_0. Найдите закон движения точки, учитывая, что:

а) $a(t)=-4t$, $t_0=0$, $v_0=2$, $x_0=4$;
б) $a(t)=2-3t$, $t_0=1$, $v_0=1$, $x_0=2$;
в) $a(t)=6t$, $t_0=0$, $v_0=1$, $x_0=3$;
г) $a(t)=2t^2-3$, $t_0=2$, $v_0=2$, $x_0=1$.

382. Материальная точка массой m кг движется по оси абсцисс под воздействием силы $F(t)$ Н, направленной вдоль оси, при этом в момент времени t_0 скорость точки и ее координата соответственно равны v_0 м/с и x_0 м. Найдите закон движения точки, учитывая, что:

а) $F(t)=6-9t$, $m=3$, $t_0=1$, $v_0=4$, $x_0=-5$;
б) $F(t)=8(3t-1)$, $m=4$, $t_0=4$, $v_0=43$, $x_0=60$;
в) $F(t)=9t^2+\frac{1}{2}$, $m=3$, $t_0=2$, $v_0=10$, $x_0=16$;
г) $F(t)=24t+24$, $m=6$, $t_0=2$, $v_0=9$, $x_0=7$.

383. Есть дифференциальное уравнение $xy'=3y$. Докажите, что ему удовлетворяет функция:

а) $y(x)=x^3$; б) $y(x)=Cx^3$.

384. Есть дифференциальное уравнение $y'' = x$. Докажите, что ему удовлетворяет функция:

а) $y(x) = 3x - 8 + \frac{x^3}{6}$; б) $y(x) = C_1x + C_2 + \frac{x^3}{6}$.

385. Найдите такое a, чтобы функция $x = at^{\frac{2}{3}}$ была решением дифференциального уравнения $x'' = -k \cdot \frac{1}{x^2}$.

386. Найдите то решение дифференциального уравнения, которое удовлетворяет данному условию:

а) $y' = x^2$, $y(2) = 1$; в) $z' = -\frac{1}{y^2}$, $z\left(\frac{1}{2}\right) = 4$;

б) $y' = \frac{1}{t^2}$, $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$; г) $z' = \frac{1}{\sqrt[3]{(3u+9)^2}}$, $z(6) = 1$.

387. Решите дифференциальное уравнение:

а) $y' = 0$; в) $y'' = 0$; д) $y'' = x^{-3}$;
б) $y' = x^4$; г) $y'' = x + 2$; е) $y'' + 2x - 5 = 0$.

---

388. Решите неравенство:

а) $2f^2 + 6f + 5 \geqslant 0$; д) $z^2 + 8z + 16 \leqslant 0$;
б) $2 + g - g^2 > 0$; е) $0{,}3t^2 + t + 0{,}3 \leqslant 0$;
в) $x^2 - 2x + 3 \geqslant 0$; ж) $-a^2 + 6a - 9 \geqslant 0$;
г) $6y^2 + y - 2 < 0$; з) $-\frac{1}{4}b^2 + \frac{2}{3}b - 1 > 0$.

389. При $x = 2$ найдите значение производной функции:

а) $y = (2x^2 + 1)^4 - \frac{2}{\sqrt{x}}$; г) $y = (3x^3 + 2)^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$;

б) $y = \frac{x \cdot \sqrt{3-x}}{(3x-1)^2}$; д) $y = \frac{2x \cdot \sqrt{3x-1}}{(2x-1)^3}$;

в) $y = \sqrt[3]{4x - \sqrt{x^2 - 2x}}$; е) $y = \sqrt[4]{3x^2 - \sqrt[2]{x + 2x^2}}$.

390. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = \frac{2x-5}{x-4}$; г) $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$; ж) $y = x - 2\sqrt{x}$;

б) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}$; д) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$; з) $y = x\sqrt{x} - 6x$;

в) $y = \frac{2x-5}{x^2-9}$; е) $y = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$; и) $y = \sqrt[3]{x^2 - x}$.

391. Два угла треугольника равны 45° и 30°, а одна из сторон — m. Найдите возможные значения двух остальных сторон.

392. Определите третью сторону треугольника ABC, у которого:

а) $AB = 8$ см, $AC = 3$ см и $\angle A = 60°$;
б) $AB = 13$ см, $AC = 15$ см и $\angle C = 60°$;
в) $AB = 8$ см, $AC = 7$ см и $\angle A = 120°$;
г) $AB = 24$ см, $AC = 31$ см и $\angle B = 120°$;
д) $AB = 12\sqrt{2}$ см, $AC = 7$ см и $\angle A = 45°$;
е) $AB = 11$ см, $AC = 7$ см и $\angle B = 30°$.

393. Найдите средний по величине угол треугольника со сторонами:

а) $2\sqrt{3}$ см, 2 см, 4 см; в) $15\sqrt{2}$ см, 7 см, 17 см;
б) 2 см, $5\sqrt{3}$ см, 7 см; г) 15 см, 8 см, 13 см.

394. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, учитывая, что α — наименьший угол треугольника со сторонами:

а) 3 см, 4 см, 5 см; в) 17 дм, 8 дм, 15 дм;
б) 5 м, 12 м, 13 м; г) 25 мм, 7 мм, 24 мм.

395. На отрезке AB выбрали точку P и на отрезках-частях PA и PB как на высотах построили прямоугольные трапеции $APQR$ и $BPQT$ с общим основанием PQ (рис. 214). Площади трапеций $APQR$ и $BPQT$ равны 4620 мм^2 и 7644 мм^2 соответственно, а их средние линии относятся как 5 : 7. Когда на отрезке AB как на высоте построили третью трапецию $ABGH$ с площадью 12 264 мм^2, то ее средняя линия оказалась равной 73 мм. Найдите:

а) средние линии трапеций $APQR$ и $BPQT$;
б) основания трапеций $APQR$ и $BPQT$, учитывая, что основания PQ и AR трапеции $APQR$ относятся как 2 : 1;
в) высоты трапеций $APQR$ и $BPQT$;
г) боковые стороны трапеций $APQR$ и $BPQT$;
д) углы трапеций $APQR$ и $BPQT$.

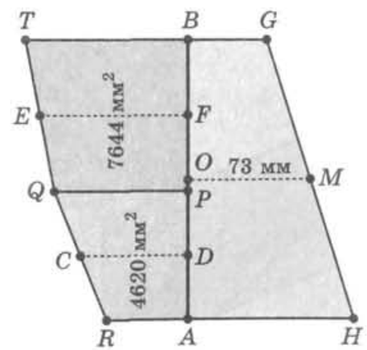


Рис. 214

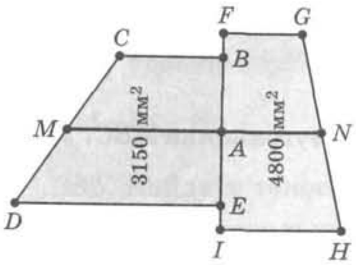


Рис. 215

396. На отрезке MN длиной 150 мм выбрали точку A и на отрезках-частях AM и AN как на средних линиях построили прямоугольные трапеции $BCDE$ и $FGHI$, площади которых соответственно равны 3150 мм^2 и 4800 мм^2, а высоты BE и FI относятся как $3:4$ (рис. 215). Найдите:

а) высоты трапеций $BCDE$ и $FGHI$;
б) основания трапеций $BCDE$ и $FGHI$, учитывая, что основание BC составляет 60 % основания DE, а основание IH трапеции $FGHI$ на 40 мм больше основания FG;
в) средние линии трапеций $BCDE$ и $FGHI$;
г) боковые стороны трапеций $BCDE$ и $FGHI$;
д) углы трапеций $BCDE$ и $FGHI$.

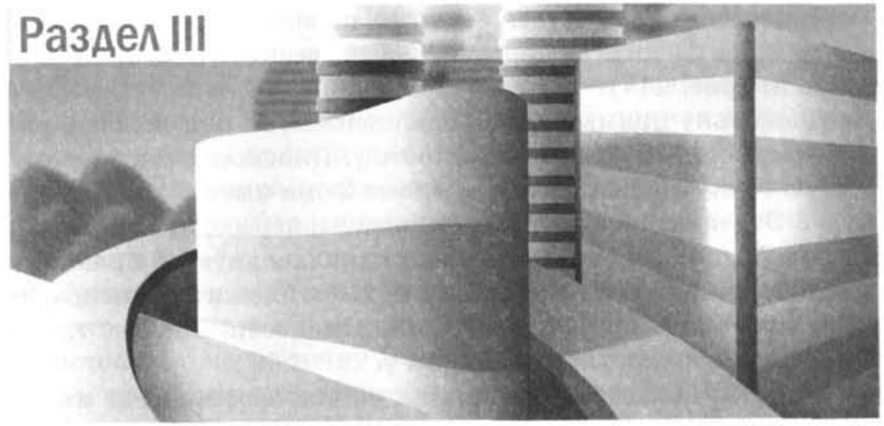
* * *

397. Можно ли число 0 представить алгебраической суммой чисел $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2008^2$?

398. В треугольник ABC с углом A, равным α, вписана окружность с центром O. Вторая окружность с центром Q касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Найдите угол BMC, учитывая, что M — середина отрезка OQ.

399. Квадрат разрезали на 100 квадратов, у 99 из которых сторона имеет длину 1. Какой могла быть площадь исходного квадрата?

Раздел III



ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

9. Взаимное расположение прямых в пространстве

Две прямые пространства называются **параллельными прямыми**, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

На плоскости через данную точку можно провести единственную прямую, параллельную данной. Это утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 1. ***Через точку вне данной прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой.***

Доказательство. Пусть есть прямая a и точка M вне ее (рис. 216). По теореме **4** из параграфа **2** через прямую a и точку M проходит единственная плоскость — плоскость α. В плоскости α через точку M проходит единственная прямая — прямая b, — параллельная прямой a. Прямая b — искомая прямая, и она единственная.

На плоскости, если одна из параллельных прямых пересекает некоторую прямую, то и другая также пересекает ее. Аналогичное утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 2. ***Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.***

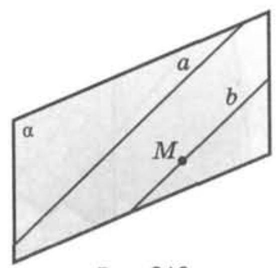


Рис. 216

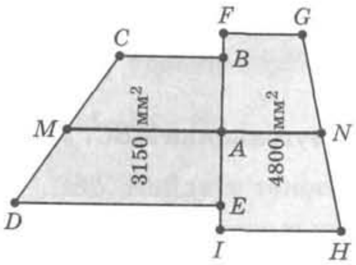


Рис. 215

396. На отрезке MN длиной 150 мм выбрали точку A и на отрезках-частях AM и AN как на средних линиях построили прямоугольные трапеции $BCDE$ и $FGHI$, площади которых соответственно равны 3150 мм^2 и 4800 мм^2, а высоты BE и FI относятся как $3:4$ (рис. 215). Найдите:

а) высоты трапеций $BCDE$ и $FGHI$;
б) основания трапеций $BCDE$ и $FGHI$, учитывая, что основание BC составляет 60 % основания DE, а основание IH трапеции $FGHI$ на 40 мм больше основания FG;
в) средние линии трапеций $BCDE$ и $FGHI$;
г) боковые стороны трапеций $BCDE$ и $FGHI$;
д) углы трапеций $BCDE$ и $FGHI$.

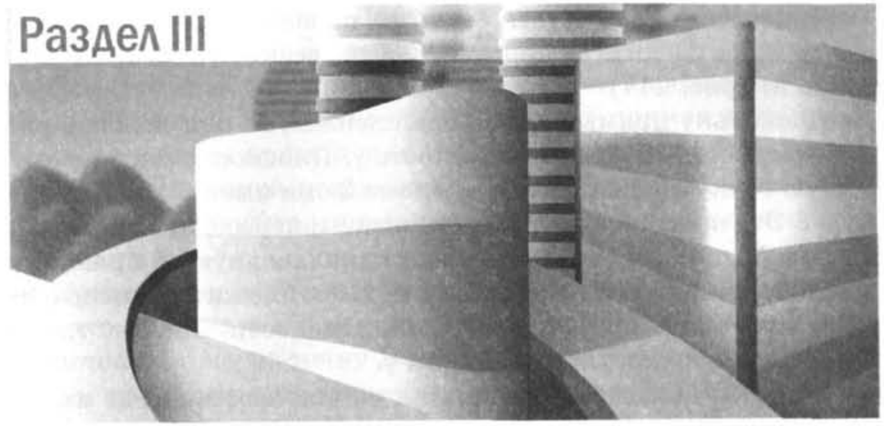
* * *

397. Можно ли число 0 представить алгебраической суммой чисел $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2008^2$?

398. В треугольник ABC с углом A, равным α, вписана окружность с центром O. Вторая окружность с центром Q касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Найдите угол BMC, учитывая, что M — середина отрезка OQ.

399. Квадрат разрезали на 100 квадратов, у 99 из которых сторона имеет длину 1. Какой могла быть площадь исходного квадрата?

Раздел III



ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

9. Взаимное расположение прямых в пространстве

Две прямые пространства называются **параллельными прямыми**, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

На плоскости через данную точку можно провести единственную прямую, параллельную данной. Это утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 1. ***Через точку вне данной прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой.***

Доказательство. Пусть есть прямая a и точка M вне ее (рис. 216). По теореме **4** из параграфа **2** через прямую a и точку M проходит единственная плоскость — плоскость α. В плоскости α через точку M проходит единственная прямая — прямая b, — параллельная прямой a. Прямая b — искомая прямая, и она единственная.

На плоскости, если одна из параллельных прямых пересекает некоторую прямую, то и другая также пересекает ее. Аналогичное утверждение истинно и в пространстве.

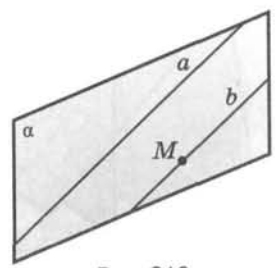


Рис. 216

Теорема 2. ***Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.***

Доказательство. Пусть есть две параллельные прямые b и c, и одна из них — прямая b — пересекает плоскость β в точке M (рис. 217).

Поскольку прямые b и c параллельны, то они лежат в одной плоскости, пусть это плоскость γ. Плоскости β и γ имеют общую точку M, поэтому по аксиоме 3 они имеют общую прямую l. Эта прямая лежит в плоскости γ и пересекает прямую b в точке M, поэтому она пересекает параллельную ей прямую c в некоторой точке N. Поскольку прямая l лежит и в плоскости β, то точка N принадлежит этой плоскости. Значит, точка N — общая точка плоскостей β и γ.

Остается доказать, что прямая c с плоскостью β не имеет других общих точек. Допустим, что это не так. Пусть прямая c имеет с плоскостью β еще одну общую точку K. Тогда по аксиоме 2 прямая c лежит в плоскости β. Получается, что прямая c — общая прямая плоскостей β и γ. Но такой прямой является прямая l. Значит, прямая c совпадает с прямой l, что невозможно, так как прямая b параллельна прямой c и пересекает прямую l.

Вы знаете, что если на плоскости две прямые параллельны третьей, то они параллельны и друг другу. Докажем, что такое утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 3. ***Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны и друг другу.***

Доказательство. Пусть прямые m и n параллельны прямой p (рис. 218). Докажем, что прямая m параллельна прямой n, т. е. что прямые m и n лежат в одной плоскости и не пересекаются.

На прямой m выберем произвольно точку A, через нее и прямую n проведем плоскость α. Докажем, что прямая m

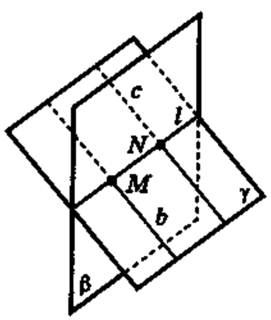


Рис. 217

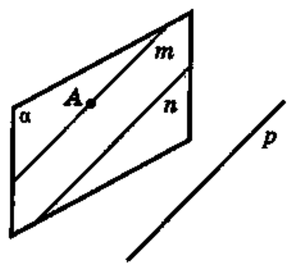


Рис. 218

лежит в этой плоскости. Допустим, что это не так. Учитывая, что прямая m имеет с плоскостью α общую точку, нужно согласиться с тем, что прямая m пересекает плоскость α. Тогда по теореме 2 эту плоскость пересекает прямая p, так как она параллельна прямой m, и прямая n, которая параллельна прямой p. Но такое невозможно, так как прямая n лежит в плоскости α. Значит, прямая m вместе с прямой n лежит в плоскости α.

Прямые m и n не пересекаются. Допустим, что это не так, т. е. что прямые m и n пересекаются в некоторой точке B. Получается, что через точку B проходят две различные прямые m и n, параллельные прямой p, что противоречит теореме 1.

Используя теорему 3, можно доказать важные утверждения о параллелепипеде.

Теорема 4. ***У параллелепипеда:***

а) противоположные грани равны;

б) все его диагонали пересекаются в одной точке и делятся ей пополам.

Доказательство. Пусть есть параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 219).

а) Докажем, например, равенство противоположных граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

Отрезки AB и A_1B_1, а также BC и B_1C_1 равны как противоположные стороны параллелограммов ABB_1A_1 и BCC_1B_1 соответственно. Отрезки AA_1 и CC_1 параллельны и равны друг другу, так как каждый из них параллелен отрезку BB_1 и равен ему. Значит, четырехугольник ACC_1A_1 — параллелограмм. А поэтому отрезки AC и A_1C_1 равны друг другу как противоположные стороны этого параллелограмма.

Поскольку $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Поэтому равны углы ABC и $A_1B_1C_1$. Значит, равны друг другу и параллелограммы-грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

б) Докажем, что все диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Четырехугольник AA_1C_1C — параллелограмм, так как его противоположные стороны AA_1 и CC_1 каждая равна отрезку

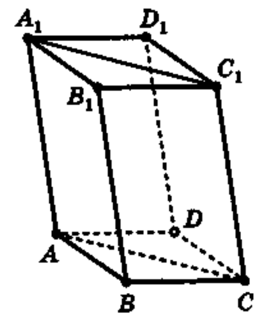


Рис. 219

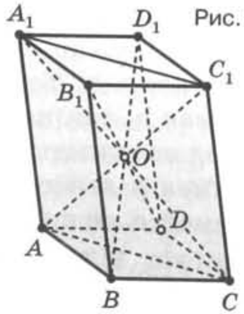


Рис. 220

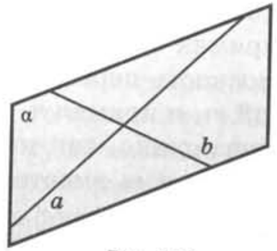


Рис. 221

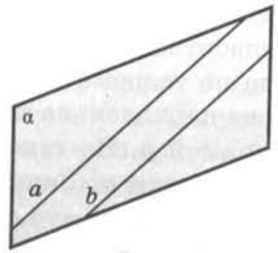


Рис. 222

DD_1 и параллельна ему, и потому равны и параллельны друг другу (рис. 220). Поэтому диагонали AC_1 и CA_1 точкой пересечения O делятся пополам.

Четырехугольник DCB_1A_1 — также параллелограмм, поэтому его диагональ DB_1 пересекает другую диагональ CA_1 в ее середине, т. е. в точке O.

Наконец, четырехугольник ABC_1D_1 — параллелограмм, поэтому его диагональ BD_1 пересекает другую диагональ AC_1 в ее середине O.

Если две прямые пересекаются (рис. 221) или параллельны (рис. 222), то они лежат в одной плоскости. Две прямые, которые не лежат в одной плоскости, называются **скрещивающимися** (рис. 223). Докажем *признак скрещивающихся прямых*.

Теорема 5. ***Если из двух прямых одна принадлежит некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то такие прямые являются скрещивающимися.***

Доказательство. Пусть прямая p лежит в плоскости α, прямая q пересекает эту плоскость в точке A, не принадлежащей прямой p (рис. 224). Докажем, что прямые p и q скрещиваются.

Допустим, что прямые p и q лежат в некоторой плоскости β. Тогда плоскости β принадлежит прямая p и точка A,

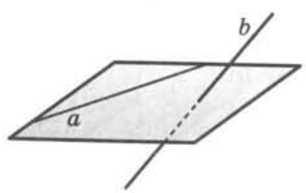


Рис. 223

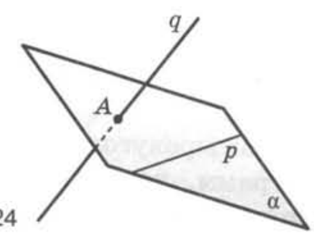


Рис. 224

которая принадлежит прямой q, и, значит, плоскость β совпадает с плоскостью α. Получили, что плоскости α принадлежит прямая q, которая по условию ей не принадлежит. Это противоречие означает, что сделанное допущение ложно.

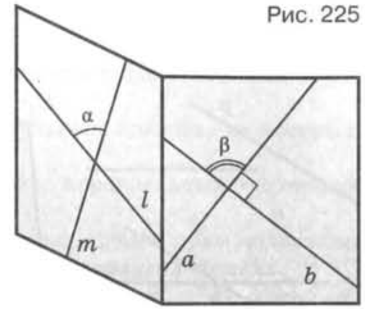


Рис. 225

Мы знаем, что *углом между пересекающимися прямыми* называется величина одного из четырех образовавшихся при этом углов, который не больше 90° (рис. 225).

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Докажем, что это определение корректное, т. е. не зависит от выбора точки, через которую проходят прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым.

Теорема 6. ***Угол между пересекающимися прямыми равен углу между параллельными им прямыми, которые пересекаются в другой точке.***

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются в точке O, прямые a_1 и b_1 — в точке O_1 и $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$. На прямых a и b от точки O отложим равные отрезки OA, OC, OB, а на прямых a_1 и b_1 от точки O_1 — отрезки O_1A_1, O_1C_1, O_1B_1, равные OA (рис. 226). Четырехугольники OO_1A_1A, OO_1B_1B и OO_1C_1C являются параллелограммами, так как противоположные их стороны OA и O_1A_1, а также OB и O_1B_1, как и OC и O_1C_1, параллельны и равны. Поэтому вторые пары сторон в этих четырехугольниках — OO_1 и AA_1, OO_1 и BB_1, OO_1 и CC_1 — также параллельны и равны. Значит, параллельны и равны отрезки AA_1 и BB_1, AA_1 и CC_1. Получили, что четырехугольники CC_1B_1B и AA_1C_1C оба также являются параллелограммами. Их противоположные стороны C_1B_1 и CB, а также A_1C_1 и AC попарно равны: $C_1B_1 = CB$ и $A_1C_1 = AC$. Теперь можно утверждать, что $\triangle C_1O_1B_1 = \triangle COB$ и

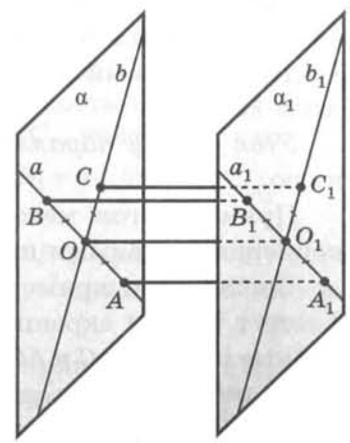


Рис. 226

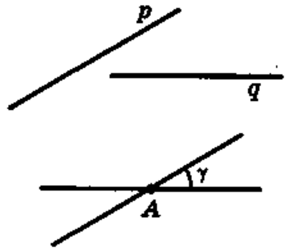


Рис. 227

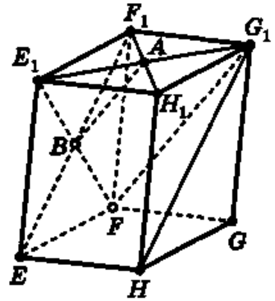


Рис. 228

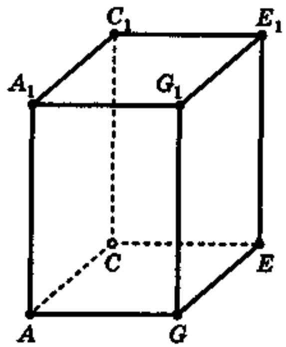


Рис. 229

$\triangle A_1O_1C_1 = \triangle AOC$ как треугольники, имеющие соответственно равные стороны. Поэтому $\angle C_1O_1B_1 = \angle COB$ и $\angle A_1O_1C_1 = \angle AOC$. Таким образом, мы доказали, что при пересечении прямых a и b, а также прямых a_1 и b_1 образуются равные углы. Значит, равны и углы между этими прямыми.

На рисунке 227 изображено, как можно найти угол между скрещивающимися прямыми: выбрать произвольно точку A пространства и через нее провести прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым. Понятно, что точка A может быть выбрана и на одной из скрещивающихся прямых.

Пример. На рисунке 228 точки A и B — точки пересечения диагоналей граней $E_1F_1G_1H_1$ и EE_1F_1F параллелепипеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$. Построим угол между скрещивающимися прямыми AB и HG_1. Для этого в плоскости EF_1G_1, которой принадлежат точка G_1 и прямая AB, через точку G_1 параллельно прямой AB проведем прямую. Это прямая G_1F. Угол FG_1H — искомый угол между скрещивающимися прямыми AB и HG_1.

Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Прямые, угол между которыми равен 90°, называются **перпендикулярными прямыми**.

Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися, а могут быть и скрещивающимися. Например, перпендикулярные прямые AC и AG, которые проходят через соответствующие ребра прямоугольного параллелепипеда $ACEGA_1C_1E_1G_1$ (рис. 229), пересекаются, а перпендикулярные прямые AC и EE_1 скрещиваются.

?

1. Сформулируйте утверждение о прямых, проходящих через данную точку параллельно данной прямой.
2. Какие две прямые пространства называются параллельными; пересекающимися; скрещивающимися?
3. Сформулируйте утверждение о параллельных прямых, из которых одна пересекает данную плоскость.
4. Сформулируйте утверждение о прямых, параллельных некоторой прямой.
5. Сформулируйте свойство противоположных граней прямоугольного параллелепипеда; диагоналей прямоугольного параллелепипеда.
6. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.
7. Какой угол называют углом между пересекающимися прямыми; скрещивающимися прямыми; параллельными прямыми?
8. Как построить угол между скрещивающимися прямыми?
9. Какие прямые называют перпендикулярными?

400. Определите, пересекаются ли прямые, на которых лежат основания двух треугольников, имеющих общую среднюю линию.

401. Параллелограмм $MNKL$ и треугольник NAK не лежат в одной плоскости. Прямая a проходит через точку P прямой AK и параллельна прямой NK. Докажите, что прямая a параллельна прямой ML.

402. Параллелограммы $MNLK$ и $MNXY$ не лежат в одной плоскости. Докажите, что четырехугольник $KLXY$ является параллелограммом.

403. Есть правильная четырехугольная пирамида $PMNKL$. На прямой PL выбрана точка D, через которую проведена прямая l, параллельная прямой LK. Докажите, что прямые MN и l параллельны.

404. На отрезке AB, конец A которого принадлежит плоскости α, выбрана точка C, и через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите отрезок CC_1, учитывая, что:

а) точка C — середина отрезка AB и $BB_1 = 14$ см;
б) $AC : CB6 = 3 : 2$ и $BB_1 = 50$ см.

405. Имеются параллелограмм $MNOP$ и трапеция $MNEK$ с основанием EK, причем эти четырехугольники не лежат в одной плоскости.

а) Установите взаимное расположение прямых OP и EK.
б) Найдите периметр трапеции, учитывая, что в нее можно вписать окружность, а ее основания MN и EK соответственно равны 45 см и 55 см.

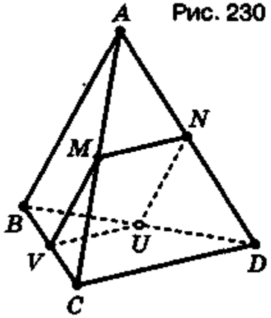


Рис. 230

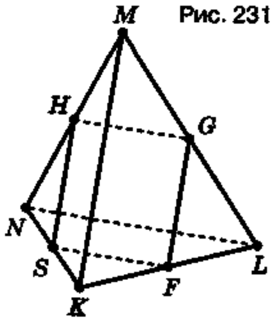


Рис. 231

406. Точки M, N, U, V — соответственно середины ребер AC, AD, BD, BC треугольной пирамиды $ABCD$ (рис. 230). Найдите периметр четырехугольника $MNUV$, учитывая, что $AB = 20$ см, $CD = 30$ см.

407. Точки H, G, F, S — середины ребер MN, ML, LK, KN треугольной пирамиды $KLMN$ (рис. 231). Найдите периметр четырехугольника $HGFS$, учитывая, что $MK = 18$ мм, $LN = 22$ мм.

408. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника (рис. 232) являются вершинами параллелограмма.

409. Отрезок PE — общая медиана треугольников QPS и TPA, а точки K, L, M, N — середины отрезков PS, PA, ET, EQ (рис. 233). Докажите, что прямые KL и MN параллельны.

410. Определите, может ли каждая из двух скрещивающихся прямых быть параллельной третьей прямой.

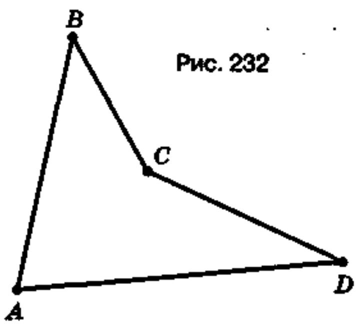


Рис. 232

Пространственный четырехугольник — четырехугольник, вершины которого не принадлежат одной плоскости.

411. Докажите, что если AB и CD — скрещивающиеся прямые, то AD и BC — также скрещивающиеся прямые.

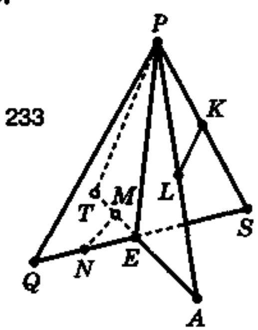


Рис. 233

412. Точки M, N, P — соответственно середины ребер HE, HF, HG треугольной пирамиды $EFGH$, а точка K лежит на отрезке FN. Определите взаимное расположение прямых:

а) NH и EF; в) MN и EF; д) KN и EG;
б) PK и FG; г) MP и EG; е) MH и FG.

413. Через точку M вне прямой a проведены две прямые, не имеющие с прямой a общих точек. Докажите, что, по крайней мере, одна из этих прямых и прямая a являются скрещивающимися.

414. Прямая m пересекает прямую k и не пересекает прямую l, параллельную прямой k. Докажите, что l и m — скрещивающиеся прямые.

415. Через вершину P ромба $PQRS$ проведена прямая a, параллельная диагонали QS, а через вершину R — прямая b, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что:

а) прямые a и RS пересекаются;
б) a и b скрещиваются.

416. Прямая m пересекает сторону AB треугольника ABC. Определите взаимное расположение прямых m и BC, учитывая, что:

а) прямая m лежит в плоскости ABC и не пересекает отрезок AC;
б) прямая m не лежит в плоскости ABC.

417. Точки M и N выбраны на скрещивающихся прямых a и b соответственно. Через прямую a и точку N проведена плоскость α, а через прямую b и точку M — плоскость β. Определите:

а) лежит ли прямая b в плоскости α;
б) пересекаются ли плоскости α и β и если пересекаются, то по какой прямой.

418. Прямые XU и VT — параллельные, а прямые XY и VT — скрещивающиеся. Найдите угол между прямыми XY и VT, учитывая, что:

а) $\angle YXU = 40°$; б) $\angle YXU = 135°$; в) $\angle YXU = 90°$.

419. Прямая l параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в его плоскости. Докажите, что l и CD —

скрещивающиеся прямые и найдите угол между ними, учитывая, что один из углов параллелограмма равен:

а) 58°;
б) 133°.

420. Прямая m параллельна диагонали FH ромба $EFGH$ и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что скрещиваются прямые:

а) m и EG и найдите угол между ними;
б) m и EH и найдите угол между ними, учитывая, что $\angle EFG = 128°$.

421. Стороны AB и CD пространственного четырехугольника $ABCD$ равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

422. Точки P, Q, R, S — середины ребер AB, BB_1, AD и диагонали B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат со стороной 1 м, а боковое ребро равно 7 м (рис. 234). Определите, во сколько раз сторона PQ четырехугольника $PQSR$ больше стороны QS.

423. Точки M и N — середины ребер PC и PD треугольной пирамиды $PCDF$, а точки U и V — середины отрезков EM и EN (рис. 235). Определите, параллельны ли прямые CD и UV.

424. В кубе $LKMNL_1K_1M_1N_1$ диагонали граней $L_1K_1M_1N_1$ и LL_1N_1N куба пересекаются в точках A и B соответственно, серединами ребер MM_1 и MN являются точки F и G соответственно. Докажите, что прямые AS и FG параллельны.

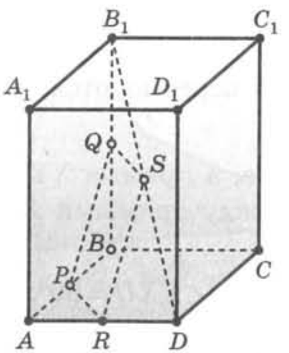


Рис. 234

425. $LKML_1K_1M_1$ — правильная треугольная призма, длина каждого ребра которой равна 1 м. Диагонали граней LL_1M_1M и MM_1K_1K пересекаются соответственно в точках X и Y (рис. 236). Найдите периметр и площадь четырехугольника XL_1K_1Y.

426. Вершины M и N трапеции $MNLK$ с основаниями NL и KM принадлежат

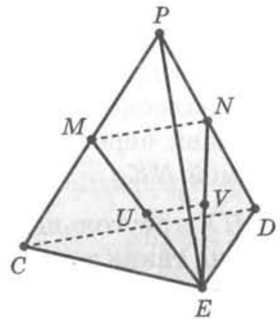


Рис. 235

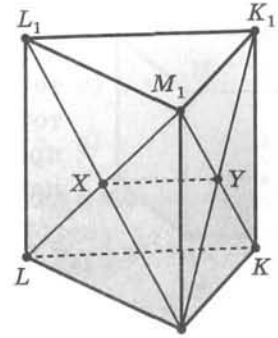


Рис. 236

плоскости γ, а две другие вершины не принадлежат ей. Найдите расстояние от точки M до точки пересечения прямой LK с плоскостью γ, учитывая, что $MK = 16$ см, $MN = 9$ см, $NL = 12$ см.

427. Точка P лежит на продолжении ребра NM параллелепипеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Найдите расстояние от точки N до точки пересечения прямой M_1P с плоскостью LL_1N, учитывая, что $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.

428. Отрезок XY имеет с плоскостью β единственную общую точку X. Через точку Y и середину Z отрезка XY проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость β в точках Y_1 и Z_1 соответственно. Найдите длину отрезка YY_1, учитывая, что $ZZ_1 = 10$ см.

429. Конец D отрезка DF принадлежит плоскости α, через другой его конец F и его точку G проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках F_1 и G_1 (рис. 237). Найдите длину отрезка GG_1, учитывая, что $FF_1 = 32$ см и $DG : GF = 3 : 5$.

430. Точка E — точка отрезка TR, который не пересекает плоскость γ. Параллельные прямые, проведенные через точки T, R, E, пересекают плоскость γ в точках T_1, R_1, E_1 соответственно. Докажите, что точки T_1, R_1, E_1 лежат на одной прямой, и найдите отрезок EE_1, учитывая, что $TT_1 = 27$ см, $RR_1 = 15$ см, $TE : RE = 1 : 3$.

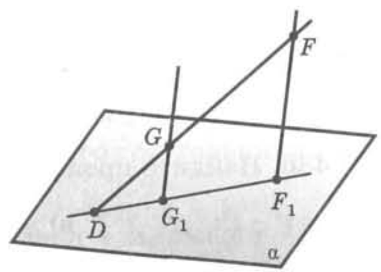


Рис. 237

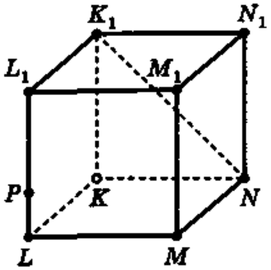


Рис. 238

431. Точка P выбрана на ребре LL_1 куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 238). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения с плоскостью M_1N_1M прямой q, проходящей через точку P и параллельной прямой NK_1.

432. На ребре HX треугольной пирамиды $HXYZ$ выбрана такая точка S, что $HS : SX = 2 : 5$, через нее проведена прямая q, параллельная медиане HP грани HYZ. Найдите медиану HP, учитывая, что длина отрезка прямой q, расположенного внутри пирамиды, равна 35 см.

433. Через вершины D и Q треугольника PDQ со стороной PQ, равной 20 см, проведена плоскость α, которой не принадлежит вершина P. Учитывая, что прямая x параллельна прямой PQ и пересекает сторону PD в такой точке C, что $PC : CD = 2 : 3$:

а) докажите, что прямая x пересекает плоскость α;
б) найдите расстояние от точки C до точки пересечения прямой x с плоскостью α.

434. На ребре GH треугольной пирамиды $FGHK$ с равными друг другу ребрами выбрана такая точка T, что $HT : TG = 1 : 3$, и через нее проведена прямая h, параллельная медиане HM боковой грани KHF и пересекающая поверхность пирамиды в точке R. Найдите ребро пирамиды, учитывая, что $TR = 6$ см.

435. Через точку пересечения медиан грани MNK треугольной пирамиды $JMNK$ с равными друг другу ребрами проведена прямая b, параллельная прямой MJ, а на ребре MJ отмечена его середина Z. Найдите площадь треугольника NZJ, учитывая, что отрезок прямой b, расположенный внутри пирамиды, равен m.

---

436. Найдите производную функции:

а) $y = t^4 - t^2$; в) $y = 5t^4 - 7t^2 - t$; д) $y = \frac{t^6}{2}$;
б) $y = 2t^2 - 3t + 5$; г) $y = 3t^4$; е) $y = t^5 + 2t^3 - \frac{1}{2t}$.

437. Найдите производную функции:

а) $y = \sqrt[3]{s}$; в) $y = \frac{1}{s\sqrt{s}}$; д) $y = s\sqrt{s+1}$;
б) $y = s\sqrt{s}$; г) $y = s^2 + \sqrt[3]{s^2}$; е) $y = s\sqrt{s} + \sqrt{s+2}$.

438. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = 6x^5$; б) $y = 5 + x^2 - 4x$; в) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x + 2$.

439. В зависимости от параметра a найдите экстремумы функции:

а) $y = x(a+1)^2$; в) $y = x^4 + ax^2 + 6$;
б) $y = x + \frac{a}{x}$; г) $y = x^3 + ax + 1$.

440. Докажите, что прямая AM, содержащая медиану треугольника ABC, одинаково удалена от точек B и C.

441. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Учитывая, что $AB > AC$, установите:

а) какой из углов — ALB или ALC — больше;
б) какой из отрезков — BL или CL больше.

442. У треугольников ABC и MNK равные периметры и равные пары углов A и M, а также B и N. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

443. У треугольников ABC и MNK равные основания AB и MN, а также высоты и медианы, проведенные к ним. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

444. На катетах прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $CAMN$ и $CBFE$. Из точек M и F на прямую AB опущены перпендикуляры MK и FG. Докажите, что $AK = BG$ и $MK + FG = AB$. Попробуйте сделать это разными способами.

445. Высота, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, делит ее на отрезки 2 см и 3 см, если считать от основания. Найдите площадь этого треугольника и радиус вписанной в него окружности.

446. Средняя линия трапеции равна 4 м, высота — 3 м. Найдите диагонали трапеции, учитывая, что они равны друг другу.

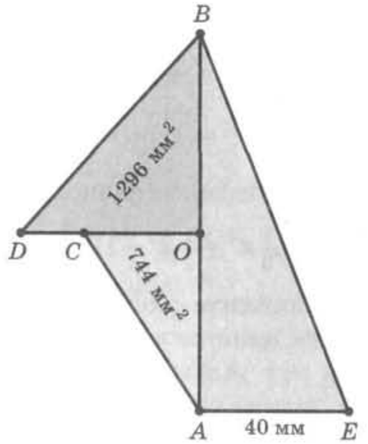


Рис. 239

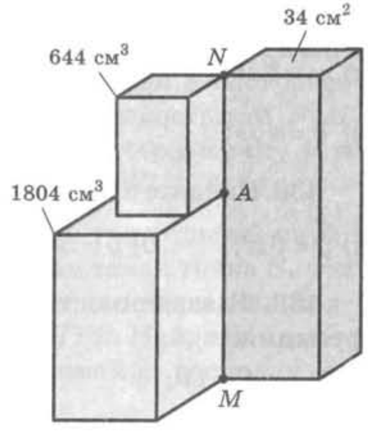


Рис. 240

447. Найдите высоту трапеции, учитывая, что ее диагонали равны 15 см и 20 см, а средняя линия — 12,5 см.

448. С одного поля собрали 1296 ц ржи, со второго — 672 ц. Найдите урожайность на каждом поле, учитывая, что средняя урожайность оказалась равной 41 ц/га, а площадь первого поля на 6 га больше.

449. На отрезке AB выбрали такую точку O, что $OB : OA = 9 : 8$, и на отрезках-частях OA и OB как на катетах построили прямоугольные треугольники OAC и OBD с площадями 744 мм^2 и 1296 мм^2 соответственно (рис. 239). Найдите стороны этих треугольников, учитывая, что третий прямоугольный треугольник ABE, построенный на отрезке AB как на катете, с площадью, равной суммарной площади треугольников OAC и OBD, имеет другой катет длиной 40 мм.

450. На отрезке MN выбрали такую точку A, что $AM : AN = 11 : 7$, и на отрезках-частях AM и AN как на высотах построили прямоугольные параллелепипеды с объемами 1804 см^3 и 644 см^3 соответственно (рис. 240). Найдите площади оснований этих параллелепипедов, учитывая, что площадь основания третьего параллелепипеда, построенного на отрезке MN как на высоте, с объемом, равным суммарному объему первого и второго параллелепипедов, оказалась равной 34 см^2.

* * *

451. Точка M — середина медианы CK треугольника ABC. Окружности, вписанные в треугольники AMK и BMK, равны. Найдите стороны AC и BC, учитывая, что $AB = 8$ и $CK = 6$.

452. Сколько есть квадратных уравнений $x^2 - mx - n = 0$, где m и n — натуральные числа, которые имеют положительный корень, не превосходящий:

а) 5; б) 2010?

453. На какое наименьшее количество выпуклых четырехугольников можно разрезать выпуклый 17-угольник?

10. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

В пространстве прямая и плоскость могут не иметь общих точек, иметь одну общую точку, и прямая может целиком принадлежать плоскости. Действительно, если прямая и плоскость имеют две общие точки, то, как утверждает аксиома **2**, сама прямая принадлежит плоскости (рис. 241).

Прямая и плоскость могут иметь единственную общую точку. Пусть α — некоторая плоскость (рис. 242). Выберем точку A на плоскости α и точку M вне плоскости α. Точки A и M определяют единственную прямую l, которая не имеет с плоскостью α иных общих точек, кроме точки A. Действительно, если допустить обратное, то по аксиоме **2** прямая l будет лежать в плоскости α, а значит, в этой плоскости будет лежать и точка M, что противоречит ее выбору.

Прямая и плоскость, которые имеют единственную общую точку, называются **пересекающимися**.

Прямая и плоскость могут не иметь общих точек. В этом случае говорят, что прямая a **параллельна** плоскости α, и пишут $a \parallel \alpha$. Докажем *признак параллельности прямой и плоскости*.

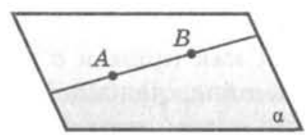


Рис. 241

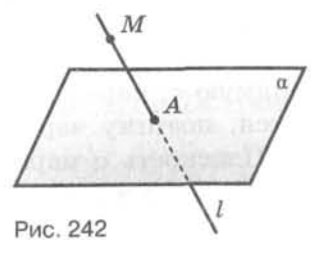


Рис. 242

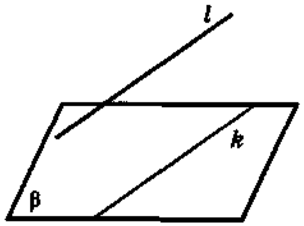


Рис. 243

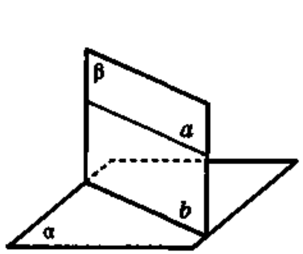


Рис. 244

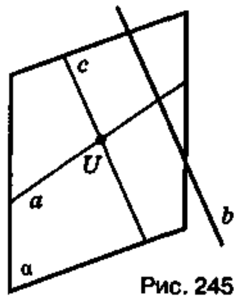


Рис. 245

Теорема 7. ***Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой этой плоскости, то она параллельна самой плоскости.***

Доказательство. Пусть прямая l не лежит в плоскости β и параллельна прямой k, принадлежащей плоскости β (рис. 243). Нужно доказать, что прямая l не имеет общих точек с плоскостью β. Допустим, что это не так, т. е. что прямая l пересекает плоскость β в некоторой точке U. Эта точка не может лежать на прямой k, так как $k \parallel l$. Тогда по признаку скрещивающихся прямых получаем, что прямые k и l — скрещивающиеся. А это противоречит тому, что прямые k и l параллельны. Значит, прямая l и плоскость β не могут иметь общих точек, $l \parallel \beta$.

Докажем *свойство прямой, параллельной плоскости.*

Теорема 8. ***Линия пересечения плоскостей, из которых одна проходит через прямую, параллельную другой плоскости, параллельна этой прямой.***

Доказательство. Пусть прямая a, параллельная плоскости α, принадлежит плоскости β, и прямая b — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 244). Тогда прямые a и b обе лежат в плоскости β и не пересекаются, так как в противном случае прямая a пересекала бы плоскость β. Значит, прямые a и b параллельны.

Пример 1. Докажем, что *через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.*

Пусть прямые a и b — скрещивающиеся (рис. 245).На прямой a выберем произвольно точку U и через нее проведем прямую c, параллельную прямой b. Прямые a и c пересекаются, поэтому через них проходит единственная плоскость α. Плоскость α параллельна прямой b, так как прямая b не лежит в плоскости α и параллельна прямой c, лежащей в плоскости α.

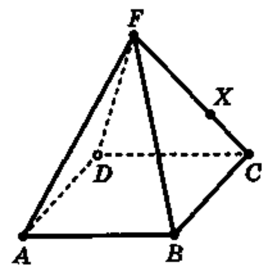


Рис. 246

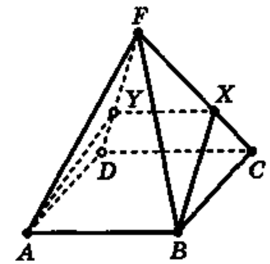


Рис. 247

Пример 2. Построим сечение правильной четырехугольной пирамиды $FABCD$ плоскостью, которая проходит через ребро AB и точку X на ребре FC (рис. 246).

Определим, по какой линии пересекает поверхность пирамиды плоскость α, которой принадлежат прямая AB и точка X. Плоскость α и грань FAB имеют общий отрезок AB, по нему плоскость α и пересекает грань FAB. Грань FBC имеет с плоскостью α общие точки B и X, поэтому отрезок BX — общая часть грани FBC и плоскости α (рис. 247). Плоскость α и грань FCD имеют общую точку X, поэтому линией пересечения плоскостей α и FCD является прямая, проходящая через точку X. Теперь обратим внимание на то, что отрезки AB и CD как противоположные стороны квадрата $ABCD$ параллельны. Поэтому прямая AB параллельна плоскости FCD. По теореме 8 плоскость α, проходящая через прямую AB, пересекает плоскость FCD по прямой, параллельной AB. Таким образом, плоскость α пересекает грань FCD по отрезку XY, который параллелен ребрам AB и CD. Грань FAD имеет с плоскостью α общие точки A и Y, поэтому плоскость α пересекает грань FAD по отрезку AY.

Получили, что плоскость α пересекает пирамиду $FABCD$ по трапеции $ABXY$.

? 1. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте свойство прямой, параллельной плоскости.

454. Верно ли, что прямая c, пересекающая прямые a и b одной плоскости, также лежит в этой плоскости?

455. Докажите, что если стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость, то прямые AD и DC также пересекают эту плоскость.

456. Средняя линия трапеции лежит в плоскости β. Определите, какие стороны трапеции пересекают плоскость β.

457. Плоскость α проходит через середину стороны AB треугольника ABC параллельно стороне BC. Докажите, что плоскости α принадлежит середина стороны AC.

458. Есть прямая a, параллельная плоскости α, и точка T, принадлежащая этой плоскости. Докажите, что прямая, которая параллельна прямой a и проходит через точку T, лежит в плоскости α.

459. Одно основание трапеции параллельно плоскости β, а вершина второго лежит в этой плоскости. Докажите, что:

а) другое основание трапеции лежит в плоскости β;
б) средняя линия трапеции параллельна плоскости β.

460. Треугольники ABC и ABD лежат в различных плоскостях. Докажите, что любая прямая, параллельная прямой CD, пересекает эти плоскости.

461. Точки P и Q лежат в плоскости α, а точка R не лежит в ней. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков PR и QR, параллельна плоскости α.

462. Вне плоскости прямоугольника $UVXY$ выбрана точка Z. Докажите, что прямая UV параллельна плоскости XYZ.

463. Вне плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AD выбрана точка T. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости BTC.

464. Докажите, что если данная прямая не лежит в пересекающихся плоскостях и параллельна линии их пересечения, то она параллельна и этим плоскостям.

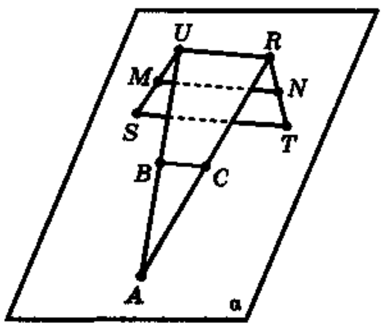


Рис. 248

465. Учитывая, что плоскость α проходит через основание ST трапеции $SURT$ и не проходит через вершину R, а точка A лежит в плоскости α (рис. 248):

а) докажите, что средняя линия MN трапеции параллельна плоскости α;
б) установите, параллельна ли плоскости α средняя линия BC треугольника UAR.

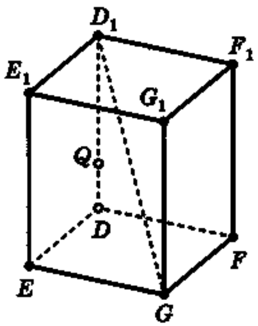


Рис. 249

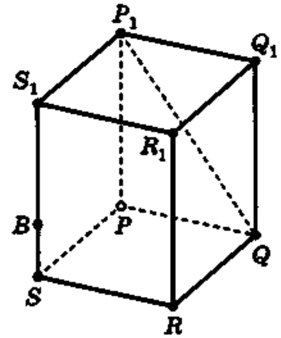


Рис. 250

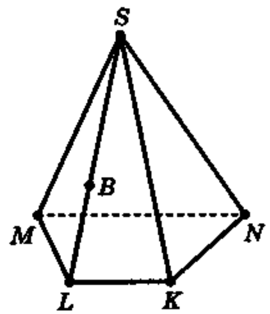


Рис. 251

466. Точка D не лежит в плоскости параллелограмма $IJKL$. Докажите, что прямая KL параллельна плоскости IDJ.

467. На ребре DD_1 куба $DFGED_1F_1G_1E_1$ выбрана точка Q (рис. 249). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения с поверхностью куба прямой c, проходящей через точку Q и параллельной прямой D_1G.

468. Есть параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$, на ребре SS_1 которого выбрана точка B (рис. 250). Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, Q, P_1.

469. Точка A не лежит в плоскости параллелограмма $MNPQ$, а точка B — середина отрезка NA. Докажите, что плоскость MBQ пересекает прямую AP.

470. На рисунке 251 изображена четырехугольная пирамида, основанием которой является трапеция $MNKL$ с параллельными сторонами LK и MN. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку B ребра SL и прямую MN. Какой фигурой является сечение?

471. Прямая a параллельна каждой из двух плоскостей, пересекающихся по прямой AB. Докажите, что прямые a и AB параллельны.

472. Докажите, что если три плоскости, не проходящие через одну прямую, попарно пересекаются, то линии их пересечения или параллельны, или имеют общую точку.

473. Сторона RT треугольника RST параллельна плоскости γ, а стороны RS и ST пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники RST и MSN подобны.

474. На отрезке AB выбрана такая точка C, что $AB : BC = 4 : 3$. Через конец B отрезка AB проведена плоскость α. Параллельно этой плоскости построен отрезок CD, равный 24 см. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E, и найдите отрезок BE.

475. Точки D и E на сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны так, что $DE = 5$ см и $\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$. Плоскость, проведенная через точки B и C, оказалась параллельной отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

476. Основание LM трапеции $KLMN$ равно 48 см. Вне плоскости трапеции выбрана точка O и отмечена середина P отрезка LO. Докажите, что плоскость KNP пересекает отрезок OM в некоторой точке H, и найдите отрезок PH.

477. Постройте сечение параллелепипеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через ребро EE_1 и точку A на ребре CC_1.

478. Учитывая, что точки Q, H, G — середины диагоналей SE_1, S_1R_1, R_1T соответствующих граней куба $SERTS_1E_1R_1T_1$ (рис. 252):

а) установите, параллельна ли прямая QH плоскости SS_1T_1;
б) докажите, что прямая HG параллельна плоскости E_1ER.

479. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $TPQUV$ равны между собой, точки B, C, D — середины ребер TP, TV, TU. Через точку B проведена прямая p, параллельная прямой CD. Постройте точку A пересечения прямой p с плоскостью TQU и найдите площадь основания пирамиды, учитывая, что площадь четырехугольника $BQUV$ равна S.

480. Точка A — середина ребра PY треугольной пирамиды $PXYZ$, все ребра которой равны a. Постройте точку пересечения с поверхностью пирамиды прямой b, которая параллельна медиане YR грани XYZ и проходит через точку A. Найдите длину отрезка этой прямой, расположенного внутри пирамиды.

481. Через точку пересечения медиан грани MPQ треугольной пирамиды $MNPQ$ проведена прямая, параллельная медиане PA грани MNP. Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка этой прямой, учитывая, что $PA = m$.

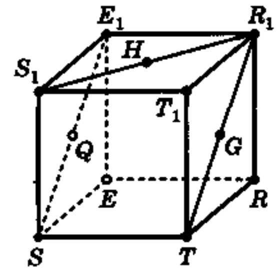


Рис. 252

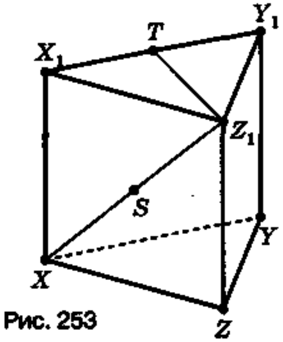


Рис. 253

482. Все ребра правильной треугольной призмы $XYZX_1Y_1Z_1$ равны друг другу, а точка S — середина диагонали XZ_1 грани XX_1Z_1Z (рис. 253). Сделайте такой рисунок в тетради и:

а) постройте точку пересечения с гранью XX_1Y_1Y прямой p, которая параллельна медиане Z_1T грани $X_1Y_1Z_1$ и проходит через точку S;
б) найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что длина отрезка прямой p, расположенного внутри призмы, равна 10 см.

483. Все ребра треугольной призмы $XYZX_1Y_1Z_1$ равны между собой, Q — точка пересечения медиан грани XYZ. Найдите длину расположенного внутри призмы отрезка прямой, параллельной прямой ZQ и проходящей через середину отрезка X_1Q, учитывая, что площадь боковой поверхности призмы равна S.

484. Учитывая, что точки N и M — середины диагоналей BC_1 и BD соответствующих граней прямоугольного параллелепипеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$:

а) докажите, что отрезок MN параллелен плоскости, в которой лежит грань CDD_1C_1;
б) найдите длину отрезка MN, учитывая, что $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

485. Точки E, F, G — середины ребер LN, LK, MK треугольной пирамиды $MNKL$. Постройте точку H, в которой плоскость EFG пересекает ребро MN, и докажите, что отрез-

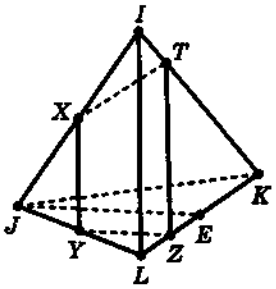


Рис. 254

ки EG и FH пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

486. Есть правильная треугольная пирамида $MNPQ$, длина бокового ребра которой равна 6 см, а основанием является треугольник со стороной 4 см. Найдите периметр сечения пирамиды плоскостью, параллельной NP и проходящей через середину ребра PQ и среднюю линию треугольника MNP.

487. На рисунке 254 изображена правильная треугольная пирамида $IJKL$. Четырехугольник $XYZT$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины X и Y ребер JI и JL и параллельно медиане JE грани JKL. Найдите длины отрезков XY и ZT, учитывая, что $IK = 48$ см.

488. Точка Q — середина ребра FA четырехугольной пирамиды $FABCD$, основанием которой является трапеция $ABCD$ с параллельными сторонами BC и AD. Найдите отрезок, по которому плоскость QBC пересекает грань FAD, учитывая, что ребро BC и средняя линия трапеции соответственно равны 30 см и 40 см.

489. Точки A, B, C — середины ребер LN, LK, MK треугольной пирамиды $LMNK$, все ребра которой равны друг другу, а площадь грани равна $16\sqrt{3}$ см^2. Найдите периметр сечения этой пирамиды плоскостью ABC.

490. Точки A, B, C — середины ребер FE, GH, GK четырехугольной пирамиды $FGHEK$, в основании которой лежит параллелограмм $GHEK$. Постройте отрезок, по которому плоскость ABC пересекает диагональное сечение FHK пирамиды.

491. Точка A — середина ребра FK четырехугольной пирамиды $FGHEK$, в основании которой лежит трапеция $GHEK$. Постройте точку P, в которой плоскость AEH пересекает прямую FG. Докажите, что отрезки PE и HA пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, учитывая, что средняя линия трапеции $GHEK$ равна $\frac{3}{2}HE$.

492. Есть правильная четырехугольная пирамида $FMNKL$, боковое ребро которой в два раза больше стороны

основания, а площадь боковой поверхности равна S. Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка прямой, параллельной медиане FR грани FLK и проходящей через точку пересечения диагоналей основания.

493. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 60 см, а боковое ребро — 78 см. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной какому-либо боковому ребру и проходящей через середины двух противоположных сторон основания, и найдите площадь сечения.

---

494. Найдите производную функции:

а) $y = \sqrt[3]{s^5}$; в) $y = \sqrt{s} - \frac{1}{s}$; д) $y = (s+1)\sqrt{s}$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{s}}$; г) $y = \frac{s^2+2s}{\sqrt{s}}$; е) $y = \frac{\sqrt{s}+s}{s+1}$.

495. Докажите, что функция:

а) $y = x + 4x^3$ возрастает на всей координатной прямой;

б) $y = \frac{1-x}{x+2}$ убывает на промежутках $(-\infty, -2)$ и $(-2, +\infty)$.

496. Найдите функцию, производная которой равна:

а) 0; в) $-2x$; д) $3x^2$;

б) $-\frac{1}{2}$; г) $2x - 1$; е) $-3x^2 - 5$.

497. Постройте прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс его острых углов. Сравните результаты и сделайте выводы. Какие зависимости здесь проявляются?

498. Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и α — тупой угол, найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

499. Два тела движутся в одном направлении — одно со скоростью 30 м/с, другое со скоростью 44 м/с и догоняет первое. После абсолютно неупругого столкновения они продолжают двигаться вместе как одна система со скоростью 39 м/с (рис. 255). Найдите массы тел, учитывая, что импульс системы равен 1092 г · м/с.

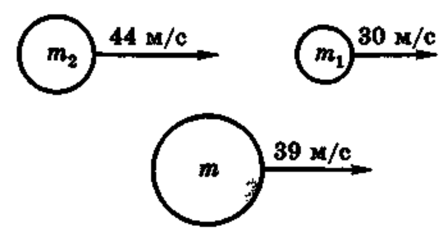


Рис. 255

500. Два тела движутся в одном направлении — одно со скоростью 30 м/с, другое со скоростью 44 м/с и догоняет первое. После абсолютно неупругого столкновения они продолжают двигаться вместе как одна система со скоростью 38 м/с. Найдите массы тел, учитывая, что импульс первого тела на 388 г · м/с меньше.

501. Если сложить импульс одного тела массой 9 г с импульсом второго тела массой 30 г, то получится 840 г · м/с. Найдите скорости тел, учитывая, что если бы третье тело имело такой импульс и двигалось со скоростью, равной суммарной скорости первого и второго тел, то его масса была бы равной 20 г.

502. Импульс первого тела массой 9 г меньше импульса второго тела массой 27 г на 495 г · м/с. Найдите скорости тел, учитывая, что если бы третье тело имело импульс, равный суммарному импульсу первого и второго тел, и двигалось со скоростью, равной сумме скоростей этих тел, то его масса была бы равной 19 г.

* * *

503. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$(x^2 + 2x)^2 + 2010 = 2007(x^2 + 2x).$$

504. На стороне BC треугольника ABC отмечена такая точка K, что $KC = AB = 1$. Найдите отрезок BK, учитывая, что $\angle KAB = 90°$ и $\angle KAC = 30°$.

505. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2010. Разрешается взять несколько чисел, сумма которых кратна 7, вычеркнуть их и записать на доске частное от деления этой суммы на 7. Может ли после нескольких таких действий на доске остаться только число 1?

11. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Две плоскости или имеют общую точку, или не имеют ее. В первом случае, в соответствии с аксиомой 3, плоскости имеют общую прямую, т. е. пересекаются по этой прямой (рис. 256). Во втором случае плоскости не пересекаются (рис. 257).

Плоскости, которые не пересекаются, называются **параллельными плоскостями.**

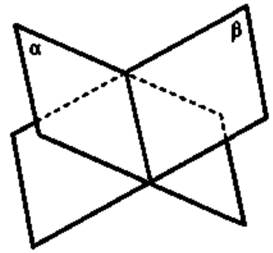


Рис. 256

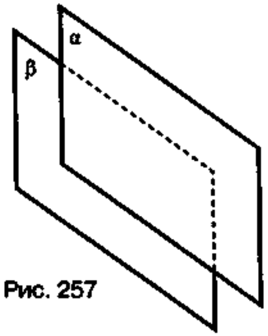


Рис. 257

Представление о параллельных плоскостях дают поверхности потолка и пола или поверхности противоположных стен комнаты (рис. 258). Следующая теорема дает *признак параллельности плоскостей.*

Теорема 9. ***Плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости, параллельна этой плоскости.***

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через пересекающиеся прямые m и n, которые обе параллельны плоскости β (рис. 259). Докажем, что плоскость α параллельна плоскости β.

Допустим, что плоскость α пересекает плоскость β по некоторой прямой a. Тогда по теореме 8 прямая a параллельна и прямой m, и прямой n. Значит, по теореме 3 прямые m и n параллельны друг другу. Но это противоречит условию о том, что они пересекаются. Значит, плоскость α параллельна плоскости β.

Следствие 1. ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.***

Это следствие получается из теоремы 9 с учетом признака параллельности прямой и плоскости.

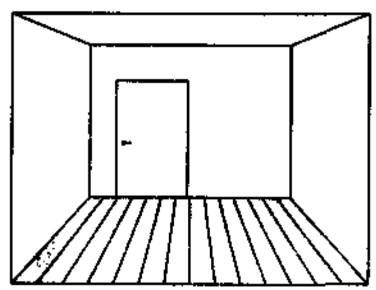


Рис. 258

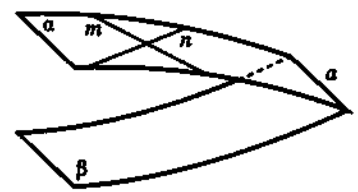


Рис. 259

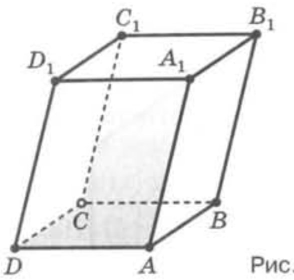


Рис. 260

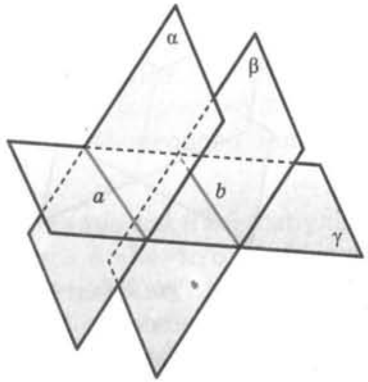


Рис. 261

Следствие 2. ***Противоположные грани параллелепипеда параллельны, т. е. лежат в параллельных плоскостях.***

Например, грань AA_1B_1B параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 260) содержит прямые AB и AA_1, а грань DD_1C_1C — прямые DC и DD_1. Поскольку $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, то $AB \parallel CD$ и $A_1B_1 \parallel D_1C_1$, и, значит, плоскости AA_1B_1B и DD_1C_1C параллельны.

Докажем *свойство параллельных плоскостей.*

Теорема 10. ***Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.***

Доказательство. Пусть плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b (рис. 261). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Допустим, что это не так, т. е. прямые a и b имеют общую точку Q. Тогда точка Q принадлежит плоскости α, так как прямая a принадлежит плоскости α, точка Q принадлежит и плоскости β, так как прямая b принадлежит плоскости β. Получается, что плоскости α и β имеют общую точку Q, но это невозможно, так как по условию плоскости α и β параллельны. Значит, прямые a и b не могут иметь общей точки. А поскольку они лежат в одной плоскости, именно в плоскости γ, то они параллельны.

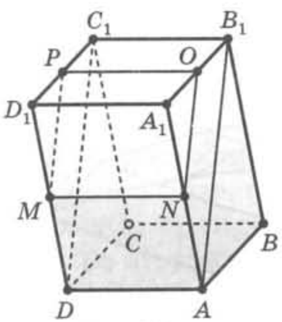


Рис. 262

Пример 1. Через середины M, N, O ребер DD_1, AA_1, A_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость. Определим, какая фигура получается в сечении.

Плоскость MNO пересекает грани AA_1D_1D и AA_1B_1B по отрезкам NM и NO

(рис. 262), при этом $MN \parallel A_1D_1$, так как MN — средняя линия прямоугольника AA_1D_1D. Поскольку плоскость MNO проходит через прямую MN, параллельную плоскости $A_1B_1C_1D_1$, то линия пересечения этих плоскостей — прямая OP — параллельна MN. Четырехугольник $MNOP$ — искомое сечение.

Учтем, что плоскости граней DD_1C_1C и AA_1B_1B параллельны. Из теоремы **10** следует, что прямые NO и MP, по которым плоскости DD_1C_1C и AA_1B_1B пересекает плоскость MNO, параллельны. А поскольку $MN \parallel OP$ и $NO \parallel MP$, то четырехугольник $MNOP$ — параллелограмм.

▶ **Теорема 11.** ***Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.***

Доказательство. Пусть параллельные плоскости α и β высекают из параллельных прямых k и l отрезки AB и CD (рис. 263). Докажем, что эти отрезки равны.

Плоскость γ, которой принадлежат параллельные прямые k и l, пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым AC и BD. В результате получается четырехугольник $ABDC$, в котором противоположные стороны параллельны. Значит, этот четырехугольник — параллелограмм, поэтому его противоположные стороны AB и CD равны.

Пример 2. Докажем, что *отрезки произвольных прямых, заключенные между тремя параллельными плоскостями, пропорциональны.*

Пусть параллельные плоскости α, β, γ высекают из прямой m отрезки AB и BC, а из прямой n отрезки DE и EF (рис. 264). Докажем, что $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

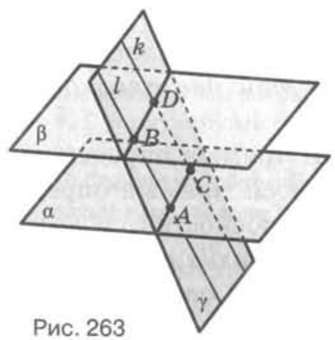


Рис. 263

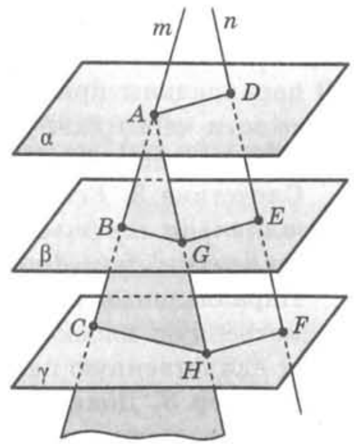


Рис. 264

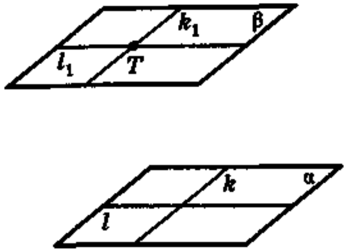


Рис. 265

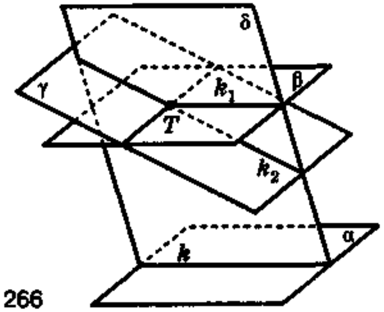


Рис. 266

Через точку A проведем прямую, параллельную прямой n, пусть она пересекается с плоскостями β и γ в точках G и H соответственно. В треугольнике ACH отрезок BG параллелен стороне CH. Поэтому $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}$. Но $AG = DE$ и $GH = EF$ в соответствии с теоремой **11**. Значит, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. ◄

Теорема 12. ***Через данную точку вне данной плоскости проходит единственная плоскость, параллельная данной.***

Доказательство. Пусть даны плоскость α и точка T вне ее (рис. 265). В плоскости α проведем какие-либо пересекающиеся прямые k и l, а через точку T — прямые k_1 и l_1, параллельные прямым k и l соответственно. Плоскость β, определенная прямыми k_1 и l_1, с учетом признака параллельности плоскостей, параллельна плоскости α и проходит через точку T.

Докажем единственность плоскости β. Допустим, что есть еще одна плоскость γ, которая проходит через точку T и параллельна плоскости α (рис. 266). Через точку T и прямую k проведем плоскость δ. Она пересекает плоскость β по прямой k_1, а плоскость γ по прямой k_2, которые обе по теореме **10** параллельны прямой k. Но такое невозможно, так как в плоскости через данную точку параллельно данной прямой проходит единственная прямая.

Следствие 3. ***Если каждая из двух данных плоскостей параллельна третьей плоскости, то эти две плоскости параллельны друг другу.***

Параллельные или пересекающиеся прямые определяют единственную плоскость. Скрещивающиеся прямые определяют единственную пару параллельных плоскостей.

Пример 3. Докажем, что *через скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости, причем такая пара плоскостей единственная.*

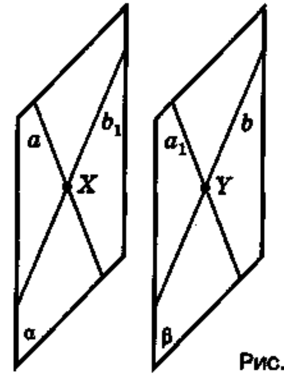


Рис. 267

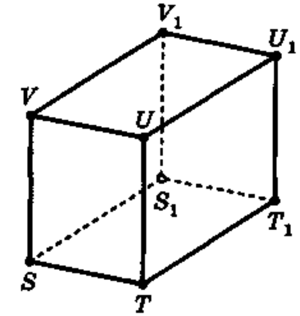


Рис. 268

Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 267). Выберем произвольно на прямой a точку X, на прямой b точку Y и через точку X проведем прямую b_1, параллельную прямой b, а через точку Y — прямую a_1, параллельную прямой a. Пересекающиеся прямые a и b_1, а также b и a_1 определяют плоскости α и β, которые с учетом признака параллельности плоскостей являются параллельными.

Единственность искомой пары плоскостей доказывается методом от противного, подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы **12**. Проведите это рассуждение самостоятельно.

На рисунке 268 плоскости граней $STUV$ и $S_1T_1U_1V_1$ параллелепипеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ проходят через скрещивающиеся прямые TU и U_1V_1.

?

1. Назовите возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей.
2. Какие плоскости называются параллельными?
3. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
4. Сформулируйте свойство линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.
5. Сформулируйте свойство отрезков, которые две параллельные плоскости высекают из параллельных прямых.
6. Сформулируйте свойство отрезков, которые три параллельные плоскости высекают из произвольных прямых.
7. Сформулируйте утверждение о плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.
8. Сформулируйте утверждение о плоскостях, которые параллельны одной плоскости.
9. Сформулируйте утверждение о параллельных плоскостях, определяемых парой скрещивающихся прямых.

506. Укажите модели параллельных плоскостей на предметах вашего класса.

507. Прямая m пересекает плоскость α в точке A. Существует ли плоскость, параллельная плоскости α, которая проходит через прямую m?

508. Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Докажите, что прямая m параллельна плоскости β.

509. Две стороны треугольника параллельны плоскости β. Докажите, что и третья сторона этого треугольника параллельна плоскости β.

510. Три отрезка P_1P_2, Q_1Q_2, и R_1R_2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $P_1Q_1R_1$ и $P_2Q_2R_2$ параллельны.

511. Учитывая, что точка T не лежит в плоскости треугольника ABC, а точки M, N, P — соответственно середины отрезков TA, TB, TC:

а) докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны;
б) найдите площадь треугольника MNP, учитывая, что площадь треугольника ABC равна 48 см^2.

512. Докажите, что если прямая a пересекает плоскость β, то она пересекает и любую плоскость, параллельную β.

513. Есть параллельные плоскости α и β, а также точка A на плоскости β. Докажите, что любая прямая, которая параллельна плоскости α и проходит через точку A, лежит в плоскости β.

514. Прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей. Докажите, что прямая a или параллельна другой плоскости, или лежит в ней.

515. Для проверки горизонтальности установки угломерного инструмента пользуются двумя уровнями, расположенными в плоскости этого инструмента на пересекающихся прямых (рис. 269). Почему уровни нельзя располагать на параллельных прямых?

516. Параллельные плоскости α и β пересекают сторону CB угла BCD в точках B_1 и B_2, а сторону CD — в точках D_1 и D_2 соответственно. Найдите:

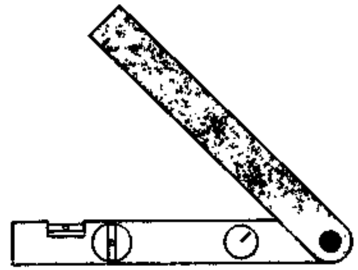


Рис. 269

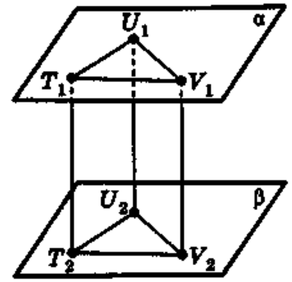


Рис. 270

а) CB_2 и CD_2, учитывая, что $B_2D_2 = 3B_1D_1$, $B_1B_2 = 12$ см, $CD_1 = 5$ см;
б) B_2D_2 и CB_2, учитывая, что $B_1D_1 = 18$ см, $CB_1 = 24$ см, $CB_2 = \frac{3}{2}B_1B_2$.

517. Учитывая, что параллельные отрезки T_1T_2, U_1U_2 и V_1V_2 заключены между параллельными плоскостями α и β (рис. 270):

а) определите вид четырехугольников $T_1U_1U_2T_2$, $U_1V_1V_2U_2$ и $T_1V_1V_2T_2$;
б) докажите, что $\triangle T_1U_1V_1 = \triangle T_2U_2V_2$.

518. Три прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из параллельных плоскостей в точках I_1, J_1 и K_1, а другую — в точках I_2, J_2 и K_2. Докажите, что треугольники $I_1J_1K_1$ и $I_2J_2K_2$ подобны.

519. Учитывая, что углы ATB, BTC, CTA и ребра TA, TB, TC треугольной пирамиды $TABC$ соответственно равны 36°, 72°, 90° и 20, 18, 21, найдите:

а) ребра основания ABC данной пирамиды;
б) площади всех боковых граней.

520. Учитывая, что через точку пересечения медиан грани JKL треугольной пирамиды $IJKL$ проведена плоскость, параллельная грани IJK:

а) докажите, что сечение пирамиды этой плоскостью есть треугольник, подобный треугольнику IJK;
б) найдите отношение площади сечения к площади треугольника IJK.

521. Начертите треугольную пирамиду $KLMN$ и:

а) постройте ее сечение плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN;

б) докажите, что плоскость, проходящая через середины E, O и F отрезков соответственно LM, MA и MK, параллельна плоскости LKA;

в) найдите площадь треугольника EOF, учитывая, что площадь треугольника LKA равна 24 см^2.

522. Начертите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение:

а) плоскостью ABC_1; б) плоскостью ACC_1.

Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

523. Начертите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, постройте его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также общий отрезок этих сечений.

524. Начертите параллелепипед $IJKLI_1J_1K_1L_1$ и отметьте внутреннюю точку M грани II_1J_1J. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно:

а) плоскости основания $IJKL$;

б) грани JJ_1K_1K;

в) плоскости JLL_1.

525. Начертите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через:

а) ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D;

б) точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости AB_1C_1.

526. Начертите параллелепипед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и постройте его сечение плоскостью, которая проходит через точки F_1, H_1 и середину ребра GH. Докажите, что построенное сечение — трапеция.

527. Начертите параллелепипед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и постройте его сечение плоскостью FKL, где K — середина ребра EE_1, а L — середина ребра GG_1. Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

528. Начертите параллелепипед $OPQRO_1P_1Q_1R_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат на ребрах:

а) PP_1, OO_1, OR; б) QQ_1, OR, PP_1.

529. Учитывая, что точки I, J, K и L не лежат в одной плоскости, а медианы треугольников IJK и KJL пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2:

а) докажите, что отрезки IL и M_1M_2 параллельны;

б) найдите M_1M_2, зная, что $IL = 12$ см.

530. Прямая a параллельна плоскости α. Определите, существуют ли плоскости, которые проходят через прямую a и параллельны плоскости α, и если существуют, то сколько таких плоскостей.

531. На ребрах QA, QB и QC треугольной пирамиды $QABC$ отмечены такие точки M, N, P, что $QM : MA = QN : NB = QP : PC$. Докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны. Найдите площадь треугольника MNP, учитывая, что площадь треугольника ABC равна 18 см^2 и $QM : MA = 2 : 1$.

532. Начертите треугольную пирамиду $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через точку M параллельно грани BDC.

533. Докажите, что в параллелепипеде $FGHIF_1G_1H_1I_1$ плоскость F_1IG параллельна плоскости I_1HG_1.

534. Определите, какие многоугольники могут получиться при пересечении плоскости и:

а) треугольной пирамиды;

б) треугольной призмы;

в) четырехугольной пирамиды;

г) параллелепипеда.

535. Учитывая, что точки B, P, R — середины ребер FG, FD, FH пирамиды $DFGH$, отрезок AB — медиана треугольника BPR, а точка C принадлежит ребру DG (рис. 271):

а) докажите, что прямая AB параллельна плоскости DGH;

б) определите, пересекается ли прямая HC с плоскостью BPR.

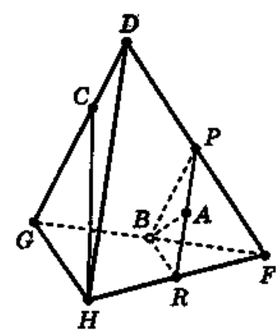


Рис. 271

536. $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — четырехугольная призма. Докажите, что основания $MNKL$ и $M_1N_1K_1L_1$ призмы лежат в параллельных плоскостях.

537. Начертите параллелепипед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ и отметьте середину R ребра KK_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостями MM_1K_1 и MLR и отрезок, по которому пересекаются эти сечения.

538. Учитывая, что диагонали NL и MK грани $KLMN$ параллелепипеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ пересекаются в точке Q, серединой ребра NN_1 является точка R, а четырехугольник N_1ALB является сечением параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости MRK и проходящей через точку N_1 (рис. 272):

а) установите, является ли параллелограммом четырехугольник N_1ALB;
б) докажите, что прямые RQ и N_1L параллельны.

539. Начертите параллелепипед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ и отметьте середины A и B ребер NN_1 и LL_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости MAK и проходящей через точку B. Постройте отрезок, по которому это сечение пересекает диагональное сечение NLL_1N_1.

540. Учитывая, что четырехугольник $EFGH$ — сечение параллелепипеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ плоскостью, параллельной плоскости TVV_1 и проходящей через точку Q пересечения диагоналей грани UVV_1U_1 (рис. 273):

а) объясните, почему прямые FE и GH параллельны;
б) определите, параллельны ли прямые GF и HE;

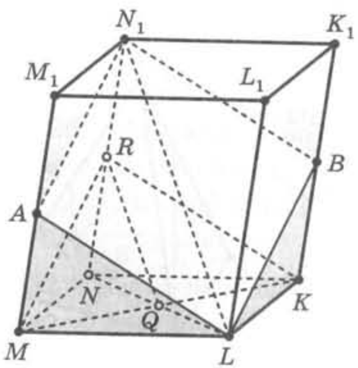


Рис. 272

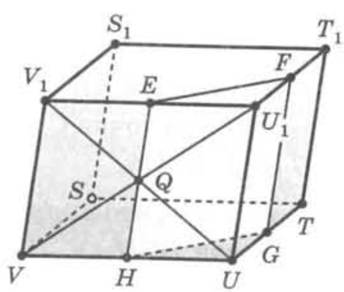


Рис. 273

в) объясните, почему прямая SS_1 параллельна плоскости сечения.

541. Есть прямоугольный параллелепипед $CDEFC_1D_1E_1F_1$ с квадратным основанием $CDEF$ и измерениями, равными 10 см, 10 см и 24 см. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости CFE_1 и проходящей через середину ребра CC_1, и найдите его периметр.

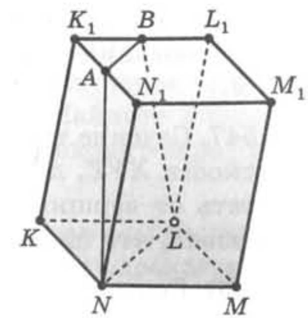


Рис. 274

542. Начертите параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости MLK_1 и проходящей через точку пересечения диагоналей грани $KLMN$. Докажите, что прямая LN_1 параллельна плоскости сечения.

543. Учитывая, что четырехугольник $LNAB$ — сечение параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ плоскостью, проходящей через прямую LN и середину A ребра N_1M_1 (рис. 274), установите, является ли трапецией четырехугольник $LNAB$.

544. Есть прямая четырехугольная призма $AJCDA_1J_1C_1D_1$, основанием которой является ромб со стороной 18 см и острым углом 60°. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через меньшую диагональ J_1D_1 ромба и середину ребра AD. Найдите периметр сечения, учитывая, что длина бокового ребра призмы равна 40 см.

545. Все ребра прямой призмы $BDFB_1D_1F_1$ равны друг другу. Найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины B, D и середину ребра FF_1, равна S.

546. Учитывая, что треугольник PRQ — сечение правильной треугольной пирамиды $HEFG$ плоскостью, которая параллельна плоскости HFG и проходит через такую точку Q ребра HG, что $FQ : QE = 1 : 2$ (рис. 275):

а) докажите, что треугольники PRQ и GHF подобны;

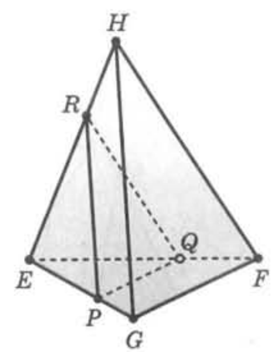


Рис. 275

б) найдите периметр треугольника PRQ, учитывая, что сторона основания пирамиды равна 30 см, а боковое ребро — 90 см.

547. Сечение треугольной пирамиды $TXYZ$, параллельное плоскости XYZ, делит боковое ребро в отношении $1:3$, если считать от вершины пирамиды. Найдите площадь сечения, учитывая, что площадь треугольника XYZ равна q.

548. Сечение пирамиды, параллельное основанию, делит боковое ребро в отношении $2:3$, если считать от вершины пирамиды. Найдите площадь сечения, учитывая, что она на 336 см^2 меньше площади основания.

549. Плоскость, которая параллельна плоскости HER и проходит через такую точку Q ребра FR правильной четырехугольной пирамиды $REFGH$, что $FQ:QR=3:2$, пересекает пирамиду по четырехугольнику $QPAB$ (рис. 276). Найдите периметр сечения, учитывая, что $EH=30$ см, $ER=25$ см.

550. Есть правильная четырехугольная пирамида $FGHIJ$ с углом грани HFI при вершине F, равным 60°. Через некоторую точку Q ребра GJ проведено сечение плоскостью, параллельной грани FJI. Найдите периметр этого сечения, учитывая, что длина его диагонали равна 14 см, а $GQ=6$ см.

551. Точки X и A — соответственно середины ребер MN и MP правильной треугольной пирамиды $PMNK$, а треугольники ARK и PXY — параллельные сечения, проходящие через прямые KA и PX соответственно (рис. 277). Найдите площадь треугольника PXY, учитывая, что площадь треугольника ARK равна S.

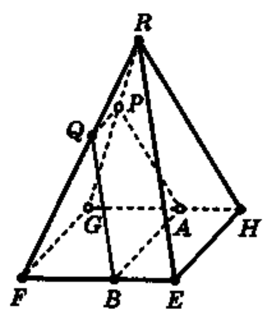


Рис. 276

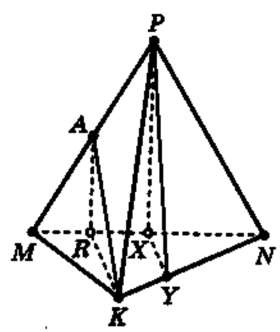


Рис. 277

552. Точки X, Y, Z — соответственно середины ребер OK, MK, MN правильной треугольной пирамиды $OMNK$. Площадь сечения плоскостью, которая проходит через прямую MX и параллельна прямой NK, равна Q. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через точки Y и Z и параллельна прямой MX.

553. Боковое ребро четырехугольной пирамиды разделено на три доли, и через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости основания. Найдите площади полученных сечений, учитывая, что площадь основания равна S.

554. Точка M делит боковое ребро CX треугольной пирамиды $CXYZ$ в отношении $2:3$, если считать от вершины пирамиды. Треугольник MBP — сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости XYZ и проходящей через точку M. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $CMBP$, учитывая, что площадь боковой поверхности пирамиды $CXYZ$ равна q.

555. Площадь сечения пирамиды плоскостью α, параллельной основанию и проходящей через точку на боковом ребре, равна 5 см^2. Определите, в каком отношении плоскость α делит боковое ребро пирамиды, учитывая, что площадь основания равна 80 см^2.

556. Сторона основания и боковое ребро правильной треугольной пирамиды соответственно равны m и n. Через точку, делящую боковое ребро в отношении $1:3$, если считать от вершины пирамиды, проведено сечение, параллельное боковой грани. Найдите его площадь.

557. На ребре M_1L_1 прямоугольного параллелепипеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ выбрана такая точка Q, что $M_1Q:QL_1=3:2$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости MN_1K и проходящей через точку Q, и найдите его площадь, учитывая, что площадь треугольника MN_1K равна 200 см^2.

558. В параллелепипеде $MNKLM_1N_1K_1L_1$ на ребрах N_1K_1, LK, MM_1 выбраны точки Q, T, R. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью QTR.

559. Точки Q, B и R — соответственно середины ребер SY, XX_1 и S_1T_1 параллелепипеда $STXYS_1T_1X_1Y_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью QBR.

560. Найдите производную функции:

а) $y = s^4 + 4s^3 - s^2 + 2s - 5$; в) $y = s^7 - \frac{1}{s^7}$;

б) $y = \frac{s^5 + 2s^3 - 2s + 5}{s}$; г) $y = \frac{s^2 + 1}{s^{10}}$.

561. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = 3x^2 - 4x - 7$;
б) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 18$;
в) $y = x^4 - 8x^2 + 6$;
г) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

562. Докажите равенство:

а) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha$;

б) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$;

в) $\sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$;

г) $\sin^2 \alpha\ (3 - \operatorname{ctg} \alpha)(3 \operatorname{ctg} \alpha - 1) = 5 \sin 2\alpha - 3$.

563. Найдите значение выражения:

а) $\cos 54° \cos 36° - \sin 54° \sin 36°$;
б) $\sin 124° \cos 34° - \cos 124° \sin 34°$;
в) $\cos 115° \cos 55° + \sin 115° \sin 55°$;
г) $\sin 87° \cos 58° + \cos 87° \sin 58°$.

564. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$;

б) $\cos \alpha + \cos(120° + \alpha) + \cos(120° - \alpha) = 0$.

565. Может ли косинус быть равным:

а) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$;

б) $\frac{a^2 + 1}{2a}$; г) $\frac{2uv}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}}$?

566. Найдите:

а) $\sin 2\alpha$, зная, что $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $0 < \alpha < 90°$;

б) $\cos 2\alpha$, зная, что $\cos \alpha = \frac{4}{5}$;

в) $\cos 2\beta$, зная, что $\cos \beta = \frac{4}{5}$;

г) $\sin 2\beta$, зная, что $\sin \beta = \frac{12}{13}$ и $0 < \beta < 90°$.

567. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha$;

б) $\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha$;

в) $\sin^2(u + v) - \sin^2(u - v) = \sin 2u \sin 2v$;
г) $\cos^2(u - v) - \cos^2(u + v) = \sin 2u \sin 2v$.

568. Упростите:

а) $\frac{\sin 40°}{1 - \cos 40°}$; в) $\frac{\cos 10°}{1 - \sin 10°}$; д) $\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x$;

б) $\frac{1 + \cos 70°}{\sin 70°}$; г) $\frac{1 + \cos 80°}{\cos 40°}$; е) $\left(\operatorname{tg} y + \frac{1}{\cos y}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(45° - \frac{y}{2}\right)$.

569. Когда собрали урожай с двух полей площадью 27 га и 36 га, то средняя урожайность оказалась равной 42 ц/га. Найдите урожайность на каждом поле, учитывая, что зерно, собранное с первого поля, составляет $\frac{19}{30}$ зерна, собранного со второго поля.

570. Когда в два треугольника, площади которых относятся как $17 : 100$, вписали окружности, то их радиусы оказались равными 2 см и 4 см (рис. 278). Найдите периметры треугольников, учитывая, что когда около окружности с радиусом 6 см описали треугольник с площадью, равной сумме площадей первого и второго треугольников, то его периметр оказался равным 39 см.

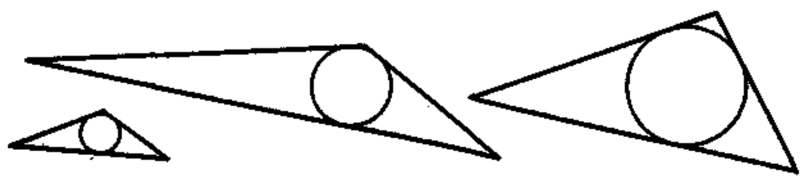


Рис. 278

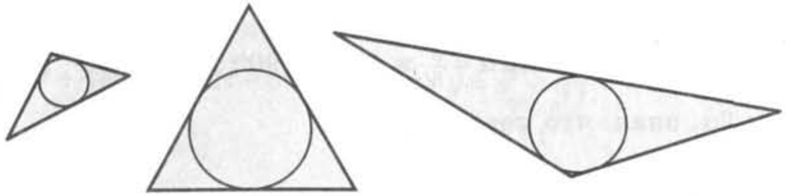


Рис. 279

571. Когда около двух окружностей описали треугольники, площади которых относятся как $1:5$, то их периметры оказались равными 26 см и 52 см (рис. 279). Найдите радиусы окружностей, учитывая, что когда в третий треугольник, площадь и периметр которого соответственно равны сумме площадей и сумме периметров первого и второго треугольников, вписали окружность, то ее радиус оказался равным 4 см.

* * *

572. Попарно различные числа a, b, c удовлетворяют условиям

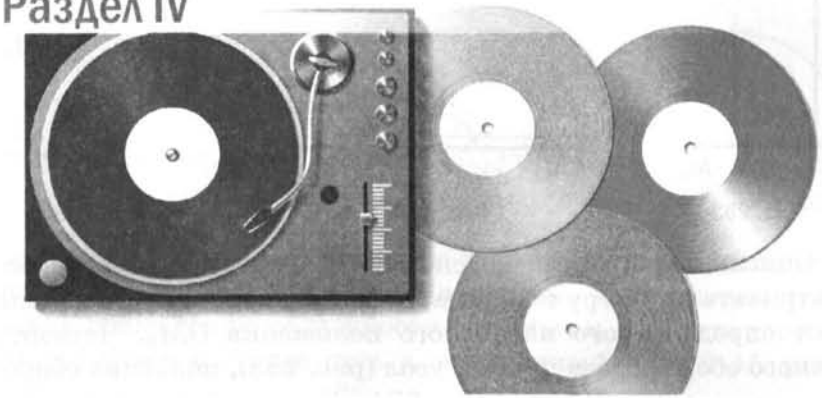
$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}.$$

Чему может быть равно произведение abc?

573. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной 1 выбраны такие точки M и N, что периметр треугольника AMN равен 2. Найдите угол MCN.

574. У пятизначных чисел, цифры которых идут по убыванию, находят сумму цифр. Определите, каких чисел больше: тех, у которых сумма цифр равна 30, или тех, у которых эта сумма равна 31.

Раздел IV



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

12. Угол и его меры

Геометрический угол есть часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки (рис. 280). До этого мы рассматривали углы, не большие полного, который равен 360°.

Вместе с этим мы встречались с угловыми величинами, большими 360°. Например, углы пятиугольника (рис. 281) вместе составляют 540°. Как можно представить себе угол такой величины? Сложим величины углов, откладывая их последовательно друг за другом, начав от луча OM (рис. 282). Мы замечаем, что углы 1, 2, 3 вместе дают угол еще меньше полного, а уже угол 4 частично наложится на угол 1, а вторая сторона угла 5 образует с лучом OM развернутый угол. В результате процесс последовательного откладывания дает полный угол, дополненный еще развернутым углом, т. е. получается угол величиной $360° + 180°$, или угол величиной 540°.

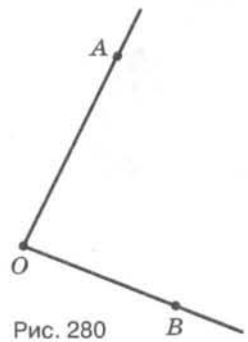


Рис. 280

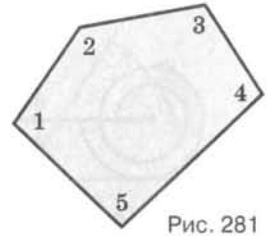


Рис. 281

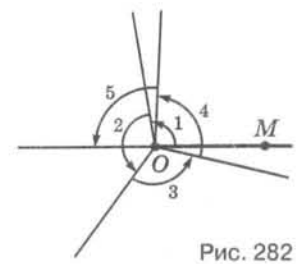


Рис. 282

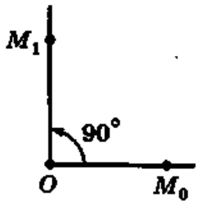


Рис. 283

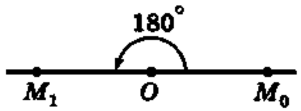


Рис. 284

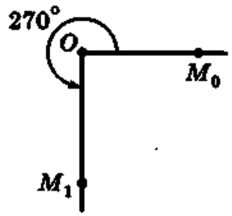


Рис. 285

Описанный процесс подсказывает, что угол можно рассматривать как меру поворота луча OM вокруг своего начала O от определенного начального положения OM_0. Четверть полного оборота дает прямой угол (рис. 283), половина оборота — развернутый угол (рис. 284), три четверти оборота — угол величиной 270° (рис. 285), полный оборот — угол величиной 360° (рис. 286), $\frac{9}{8}$ оборота — угол величиной 405° (рис. 287), два полных оборота — угол величиной 720° (рис. 288). Подобные углы описывают, например, лопасти вентилятора (рис. 289).

Углы можно измерять в различных единицах. Вы знаете градусное измерение углов, когда за единицу измерения принимается угол в 1 градус, который равен стовосьмидесятой доле развернутого угла. Единица измерения может быть и иной. На передней панели калькулятора, кроме градусов, указаны еще грады и радианы. *Град* является метрической единицей величины угла, он равен сотой доле прямого угла.

Большое значение в математике имеет радианное измерение углов. Пусть зафиксирована одна из сторон угла. Если вращать вторую его сторону вокруг вершины, то образуется

Рис. 286

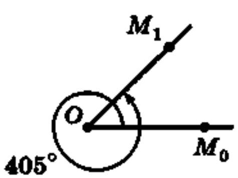


Рис. 287

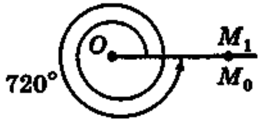
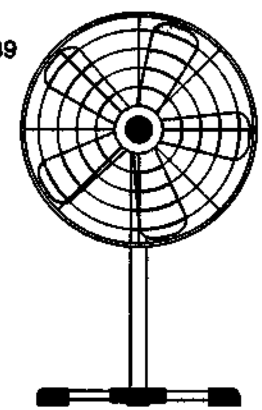


Рис. 288

Рис. 289



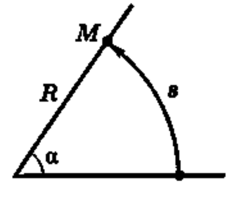


Рис. 290

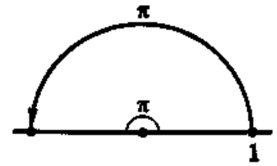


Рис. 291

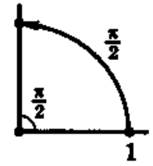


Рис. 292

определенный угол. Выберем на стороне, которая вращается, точку M на расстоянии R от вершины. При вращении эта точка движется по окружности с радиусом R. Пусть угол поворота равен α. Тогда путь s, пройденный точкой M, равен $\frac{2\pi R}{360}\alpha$ (рис. 290), т. е. $\frac{\pi R\alpha}{180}$, а отношение пути к радиусу равно $\frac{\pi\alpha}{180}$, т. е. не зависит от радиуса. Поэтому это отношение может быть взято в качестве меры угла. Количественно оно равно пути, пройденному точкой по единичной окружности. Развернутому углу соответствует половина длины единичной окружности, т. е. число π (рис. 291). Прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$ (рис. 292), угол правильного треугольника — $\frac{\pi}{3}$ (рис. 293).

Угол, мера которого равна числу 1, называется **радианом** (рис. 294).

Угол в 1 радиан вырезает из окружности дугу, равную радиусу этой окружности (рис. 295).

На практике используются как градусная, так и радианная меры угла. Установим связь между градусом и радианом. Для этого используем тот факт, что развернутый угол с одной стороны равен 180°, с другой — π радианам:

$$180° = \pi \text{ радианам.}$$

Значит,

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ радиан} \approx 0{,}017453 \text{ радиан;}$$

$$1 \text{ радиан} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}2958° \approx 57°\ 17'45''.$$

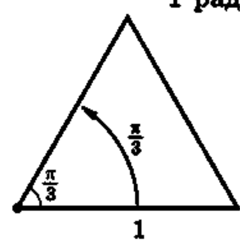


Рис. 293

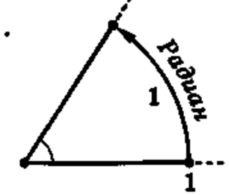


Рис. 294

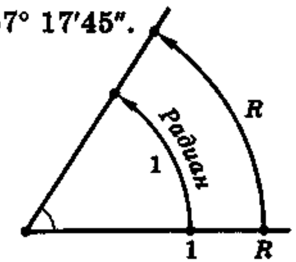


Рис. 295

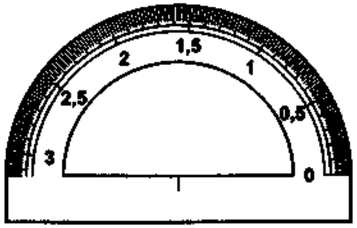


Рис. 296

Принято обозначение радиана в записи меры угла опускать. Запись вида $\alpha = 1{,}23$ означает, что величина угла α равна 1,23 радиана.

Для практического измерения углов в радианной мере может служить специальный радианный транспортир, на полуокружности которого отмечены радианы и доли радианов (рис. 296).

Соответствие между градусной и радианной мерами для часто используемых углов дается следующей таблицей, ее полезно запомнить.

Градусы	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330
Радианы	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

Движение точки по окружности во многом напоминает движение точки по прямой. Чтобы определить местоположение точки на прямой, недостаточно знать путь, пройденный ей от начальной точки, нужно еще указать направление движения. Если зафиксировано положительное направление, то местоположение точки на прямой определяется одним числом, которое положительно, если движение происходит в положительном направлении, и отрицательно, если движение происходит в отрицательном направлении, т. е. в направлении, противоположном положительному. Аналогично поступают и при описании движения тела по окружности. В качестве положительного направления движения выбирается движение против часовой стрелки. Угол задается числом x, которое может быть любым действительным.

Чтобы построить угол x, нужно на единичной окружности от неподвижной точки отложить путь, равный $|x|$ в направлении, которое определяется знаком числа x.

Пример 1. Построим угол, мера которого равна:

а) 2,5; б) –4; в) –13.

а) Число 2,5 положительное, поэтому в направлении против часовой стрелки по окружности откладываем 2,5 единиц (рис. 297).

б) Число –4 отрицательное, поэтому по окружности в направлении по часовой стрелке откладываем 4 единицы (рис. 298).

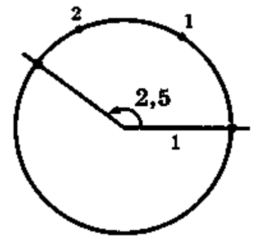


Рис. 297

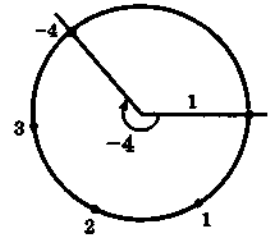


Рис. 298

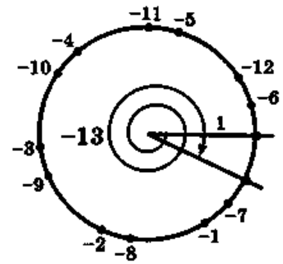


Рис. 299

в) Число –13 отрицательное, поэтому по окружности в направлении по часовой стрелке откладываем 13 единиц (рис. 299).

Пример 2. Найдем градусную меру угла, радианная мера которого равна 13.

Поскольку 1 радиан $= \frac{180°}{\pi}$, то

$$13 = \frac{180°}{\pi} \cdot 13 \approx 744{,}84514° = 744° + 60' \cdot 0{,}84514 =$$

$$= 744° + 50{,}7084' = 744°\ 50' + 60'' \cdot 0{,}7084 \approx 744°\ 50'\ 43''.$$

Пример 3. Найдем радианную меру угла, градусная мера которого равна $132°\ 50'\ 49''$.

Выразим сначала количества минут и секунд в десятичных долях градуса, учитывая, что $1' = \frac{1°}{60}$, $1'' = \frac{1°}{3600}$:

$$50'49'' = \frac{50°}{60} + \frac{49°}{3600} = \frac{50° \cdot 60 + 49°}{3600} = 0{,}847°.$$

Значит,

$$132°\ 50'\ 49'' \approx 132° + 0{,}847° = 132{,}847° = \frac{\pi \cdot 132{,}847}{180} \approx 2{,}32.$$

Теорема 1. ***Длина l дуги окружности с радиусом R и радианной мерой α определяется формулой***

$$l = R\alpha.$$

Доказательство. Пусть центральный угол окружности с радиусом R имеет радианную меру α (рис. 300).

Центральный угол величиной 1 радиан ограничивает дугу окружности длиной R. Поэтому длина l дуги, ограниченной углом величиной α радиан, определяется формулой $l = R\alpha$.

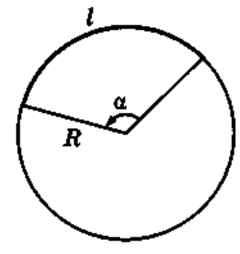


Рис. 300

Теорема 2. ***Площадь S сектора с радиусом R и центральным углом, радианная мера которого равна α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, определяется формулой*** $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

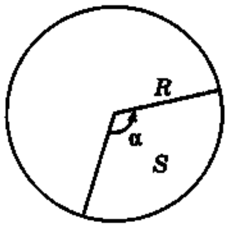


Рис. 301

Доказательство. Пусть центральный угол окружности с радиусом R имеет радианную меру α (рис. 301). Площадь полукруга, т. е. кругового сектора, образованного углом в π радиан, равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Поэтому площадь S сектора в 1 радиан в π раз меньше, т. е. равна $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$, или равна $\frac{1}{2}R^2$. Значит, площадь сектора в α радиан равна $\frac{1}{2}R^2\alpha$.

?

1. Что такое геометрический угол?
2. Как можно образовать угол вращением вокруг точки?
3. Почему отношение пути, пройденного точкой по окружности, к радиусу этой окружности может быть взято в качестве меры угла?
4. Какой угол называется радианом?
5. Как радиан связан с градусом?
6. Как найти длину дуги окружности с данным радиусом по величине угла, соответствующего этой дуге?
7. Как найти площадь сектора с данным радиусом по величине его центрального угла?

575. Найдите градусные меры углов, которые описывают минутная и часовая стрелки часов за:

а) 1 с; б) 1 мин; в) 1 ч; г) 1 сут.

576. Определите, в какой координатной четверти оканчивается угол с градусной мерой, равной:

а) 80°; в) 150°; д) 920°; ж) 1780°;
б) –80°; г) –150°; е) –920°; з) –1780°.

577. Могут ли углы α и $-\alpha$ оканчиваться в одной четверти?

578. Запишите формулу, задающую углы, которые оканчиваются на:

а) положительной полуоси абсцисс;
б) отрицательной полуоси абсцисс;
в) положительной полуоси ординат;
г) отрицательной полуоси ординат;
д) биссектрисе первого координатного угла;
е) биссектрисе второго координатного угла;
ж) биссектрисе третьего координатного угла;
з) биссектрисе четвертого координатного угла;
и) оси абсцисс;
к) оси ординат;

л) прямой $y = x$;
м) прямой $y = -x$.

579. Выразите в радианах угол, градусная мера которого равна:

а) 40°; в) 315°; д) 3900°;
б) 140°; г) 1000°; е) 7000°.

580. Выразите в градусах угол, градусная мера которого равна:

а) $\frac{\pi}{8}$; в) $\frac{2\pi}{9}$; д) $\frac{7\pi}{18}$;
б) $\frac{\pi}{5}$; г) $\frac{3\pi}{5}$; е) $\frac{11\pi}{20}$.

581. Выразите в градусах угол, радианная мера которого равна:

а) 2; б) 2,7; в) 4,8; г) $\frac{13}{5}$; д) $\frac{7}{18}$; е) $\frac{11}{20}$.

582. Определите, в какой координатной четверти оканчивается угол с радианной мерой, равной:

а) $\frac{\pi}{8}$; в) $\frac{2\pi}{9}$; д) $\frac{7\pi}{18}$; ж) $\frac{7}{18}$; и) 48; л) $\frac{13}{5}$;
б) $\frac{\pi}{5}$; г) $\frac{3\pi}{5}$; е) $\frac{11\pi}{20}$; з) 2; к) 12,7; м) $\frac{113}{20}$.

583. Найдите градусную и радианную меры углов:

а) прямоугольного равнобедренного треугольника;
б) прямоугольного треугольника, острые углы которого относятся как 2 : 3;
в) равнобедренного треугольника, разные углы которого относятся как 1 : 2;
г) четырехугольника, которые относятся как 4 : 7 : 9: 16;
д) трапеции, острые углы которой относятся как 4 : 5, а остальные — как 8 : 7;
е) равнобедренной трапеции, разные углы которой относятся как 4 : 5;
ж) прямоугольной трапеции, непрямые углы которой относятся как 5 : 7;
з) параллелограмма, разные углы которого относятся как 1 : 11.

584. Найдите в радианах в секунду угловую скорость пропеллера, который делает в минуту:

а) 90 оборотов; в) 660 оборотов;
б) 300 оборотов; г) 1000 оборотов.

585. Найдите в радианах в час угловую скорость:

а) секундной стрелки часов;
б) минутной стрелки часов;
в) часовой стрелки часов.

586. С помощью калькулятора найдите радианную меру угла, градусная мера которого равна:

а) 35°; в) 237°; д) 405° 6′;
б) 142°; г) 375° 36′; е) 35° 26′ 39″.

587. С помощью калькулятора найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

а) 0,3543; в) 2,376; д) 3,1416;
б) 0,9142; г) 3,7536; е) 35,2639.

Рис. 302

588. Окружность морского компаса (рис. 302) делится на 32 доли, которые называются *румбами*. Найдите в градусах и радианах величину румба.

589. На единичной окружности найдите точку M_1, на которую отображается точка M_0 (1; 0) при повороте на угол α, равный:

а) 35°; в) 235°; д) 405°;
б) −130°; г) −305°; е) 735°.

590. На единичной окружности найдите точку M_1, на которую отображается точка M_0 (1; 0) при повороте на угол α, равный:

а) $\frac{\pi}{8}$; в) $\frac{7\pi}{8}$; д) $\frac{17\pi}{8}$;
б) $-\frac{\pi}{8}$; г) $-\frac{7\pi}{8}$; е) $-\frac{17\pi}{8}$.

591. Найдите длину дуги, учитывая, что ее радиус равен 3 м, а угловая мера составляет:

а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{11\pi}{12}$.

592. Найдите радиус дуги, учитывая, что ее длина равна 10 м, а угловая мера составляет:

а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{11\pi}{12}$.

593. Найдите радианную меру дуги, учитывая, что ее длина равна 15 м, а радиус составляет:

а) 3 м; б) 10 м; в) 2,39 м; г) 4,92 м.

594. Найдите длину дуги единичной окружности, учитывая, что ее радианная мера составляет:

а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) 3,2; г) 6,2.

595. Найдите площадь сектора, учитывая, что его радиус равен 15 см, а радианная мера дуги составляет:

а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{3\pi}{8}$; в) 1,2; г) 2,2.

596. Найдите площадь сектора, учитывая, что его радиус равен 20 м, а длина дуги составляет:

а) 3 м; б) 10 м; в) 23,9 м; г) 49,2 м.

597. Найдите радиус сектора, учитывая, что его площадь равна 256 $м^2$, а радианная мера дуги составляет:

а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{3\pi}{8}$; в) $\frac{4\pi}{5}$; г) 0,92.

598. Найдите радиус сектора, учитывая, что радианная мера его дуги составляет $\frac{4\pi}{5}$, а его площадь равна:

а) 2,5 $м^2$; б) 16 $м^2$; в) 25 $м^2$; г) 121 $м^2$.

599. Найдите радианную меру дуги сектора, учитывая, что его радиус равен 50 см, а площадь составляет:

а) 2,5 $м^2$; б) 16 $м^2$; в) 250 $м^2$; г) 980 $м^2$.

600. Найдите радианную меру дуги сектора, учитывая, что его площадь составляет 3500 см, а радиус равен:

а) 2,5 м; б) 7 м; в) 16 м; г) 29 м.

601. Найдите радианные меры углов треугольника, стороны которого равны:

а) 2, 3, 4; б) 8, 9, 11; в) 11, 60, 61; г) 27, 39, 41.

602. Найдите радианную меру угла правильного *n*-угольника, учитывая, что *n* равно:

а) 5; б) 6; в) 12; г) 18.

603. Найдите значение выражения:

а) $\sin 30° + \cos 60° + \sin 45° - \cos 45° - \operatorname{tg} 45°$;
б) $\sin 120° + \cos 30° + 2 \cos 150° + 3 \operatorname{tg} 150° - \operatorname{tg} 60°$;
в) $\sin 45° + \cos 135° + \operatorname{tg} 60° + 2 \cos 120° - \operatorname{ctg} 30°$;
г) $2 \sin 120° - \cos 120° + 2 \operatorname{tg} 45° + 3 \operatorname{tg} 150° - 3 \sin 30°$.

604. Упростите выражение:

а) $\sin(180° - \alpha)\cos(90° - \alpha) - \cos(180° - \alpha)\sin(90° + \alpha)$;
б) $(1 - \sin^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2(90° + \alpha)$;
в) $\sin(90° + \alpha)\cos(180° - \alpha) - \sin\alpha \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha$;
г) $1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha$.

605. Найдите значение выражения:

а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$; в) $\sin 165°$; г) $\cos 165°$.

606. Учитывая, что $\cos\alpha = 0{,}6$, найдите значение выражения:

а) $\sin(60° + \alpha)$; б) $\cos(60° + \alpha)$; в) $\sin(60° - \alpha)$; г) $\cos(60° - \alpha)$.

607. Учитывая, что $\cos\alpha = 0{,}8$, найдите значение выражения:

а) $\cos 2\alpha$; б) $\sin 2\alpha$; в) $\cos 3\alpha$; г) $\sin 3\alpha$.

608. Найдите стороны AC и BC треугольника ABC, учитывая, что $AB = 21$ см, $\operatorname{ctg} A = \frac{3}{4}$ и $\operatorname{ctg} B = 1\frac{7}{8}$.

609. Острый угол параллелограмма равен 60°. Найдите стороны параллелограмма, учитывая, что:

а) его периметр равен 44 см, а меньшая диагональ — 14 см;
б) его периметр равен 30 см, а большая диагональ — 13 см;
в) разность сторон равна 16 см, а меньшая диагональ — 19 см;
г) отношение сторон равно 5 : 8, а меньшая диагональ — 28 см.

610. С помощью микрокалькулятора или таблиц найдите стороны AC и BC треугольника ABC, учитывая, что:

а) $AB = 5$, $\angle A = 40°$, $\angle B = 50°$;
б) $AB = 6$, $\angle A = 40°$, $\angle B = 55°$;
в) $AB = 4$, $\angle A = 35°$, $\angle B = 65°$;
г) $AB = 10$, $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$.

611. Автомобиль ехал по трассе со скоростью 94 км/ч, а при переходе на шоссе снизил скорость, с которой проехал 175 км.

Найдите меньшую скорость автомобиля, учитывая, что время движения с этой скоростью составляет $\frac{3}{5}$ от времени движения с другой скоростью, а средняя скорость на всем пути составила 79 км/ч.

612. Есть две таблицы, в одной из которых 6 строк, а во второй — 15 клеток, и количество столбцов первой таблицы в 2 раза больше. Найдите количество клеток первой таблицы, учитывая, что в третьей таблице с количеством клеток, равным суммарному количеству клеток первой и второй таблиц, и количеством строк, равным суммарному количеству строк первой и второй таблиц, столбцов оказалось 5.

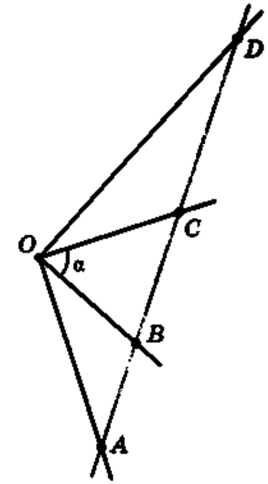


Рис. 303

613. Есть два прямоугольных параллелепипеда, у одного площадь основания равна 20 см^2, а у второго высота — 8 см, а объем — на 140 см^2 больше, чем у первого. Найдите площадь основания второго параллелепипеда, учитывая, что третий параллелепипед с объемом, равным суммарному объему первого и второго параллелепипедов, и высотой, равной суммарной высоте первого и второго параллелепипедов, имеет площадь основания, равную 28 см^2.

* * *

614. Четыре луча с общей вершиной O пересекают некоторую прямую в точках A, B, C, D (рис. 303). Найдите площади треугольников AOD и BOC, учитывая, что площади треугольников AOC и BOD равны S_1 и S_2, углы AOC и BOD прямые, а угол BOC равен α.

615. Серединный перпендикуляр к биссектрисе AL треугольника ABC пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что $FB \cdot FC = FL^2$.

616. Решите уравнение

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2}.$$

13. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного углового и числового аргументов

Вы уже изучали синус, косинус, тангенс и котангенс углового аргумента, который изменялся в пределах от 0° до 180°. Теперь введем тригонометрические функции произвольного углового аргумента.

Пусть центр единичной окружности совпадает с началом координат (рис. 304) и ее точка M_0 (1; 0) при повороте на угол α отобразилась в точку $M_\alpha(x;\ y)$.

Синусом угла α **называется ордината** y **точки** $M_\alpha(x;\ y)$, **полученной поворотом точки** $M_0(1;\ 0)$ **на угол** α.

Косинусом угла α называется абсцисса x точки $M_\alpha(x;\ y)$, полученной поворотом точки $M_0(1;\ 0)$ на угол α.

Синус и косинус угла α обозначаются соответственно $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

В этих определениях угол α может быть выражен как в градусной, так и в радианной мерах.

Отметим, что данные определения синуса и косинуса для значений угла из промежутка от 0° до 180° совпадают с определениями, которые вам известны из IX класса. Например,

$$\sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 180^\circ = \cos \pi = -1.$$

Пример 1. Найдем $\sin(-90^\circ)$ и $\cos(-90^\circ)$.

Как показывает рисунок 305, точка (1; 0) при повороте на угол величиной −90° отображается на точку (0; −1). Поэтому $\sin(-90^\circ) = -1$ и $\cos(-90^\circ) = 0$.

Пример 2. Найдем $\sin \frac{3\pi}{2}$ и $\cos \frac{3\pi}{2}$.

Из рисунка 306 видно, что точка (1; 0) при повороте на угол величиной $\frac{3\pi}{2}$ отображается на точку (0; −1). Поэтому $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ и $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$.

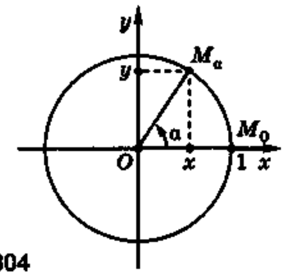


Рис. 304

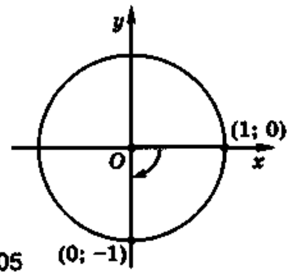


Рис. 305

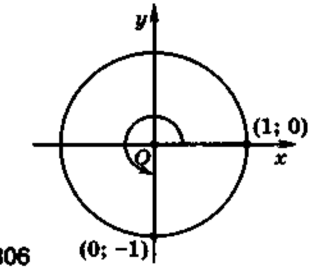


Рис. 306

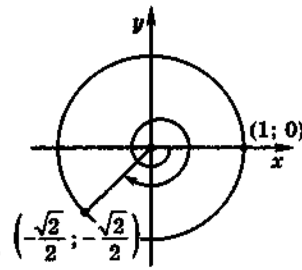


Рис. 307

Пример 3. Найдем $\sin(-495^\circ)$ и $\cos(-495^\circ)$.

Как показывает рисунок 307, точка (1; 0) при повороте на угол 495° по часовой стрелке через 360° вернется в исходное положение, а затем еще повернется на 135° и в результате отобразится на точку $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Поэтому $\sin(-495^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos(-495^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тангенсом угла α **называется отношение синуса этого угла к его косинусу.**

Котангенсом угла α называется отношение косинуса этого угла к его синусу.

Тангенс и котангенс угла α обозначаются соответственно $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Таким образом,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ и } \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Теперь введем синус, косинус, тангенс и котангенс числового аргумента. Это желание объясняется тем, что одна зависимость может описывать различные процессы, в которых переменные могут иметь самый разный смысл. Например, формула $y = ax^2$ может иметь самые разные интерпретации, в том числе выражать зависимость:

$S = a^2$ площади S квадрата от его стороны a;

$h = \frac{g}{2}t^2$ пройденного телом пути h от времени t при свободном падении с ускорением g;

$a = \frac{1}{R}v^2$ линейного ускорения a от скорости v при движении тела по окружности с радиусом R;

$K = \frac{m}{2}v^2$ кинетической энергии K тела массой m от его скорости v;

$Q = RtI^2$ количества Q теплоты, выделившейся в проводнике сопротивлением R за время t, от силы тока I.

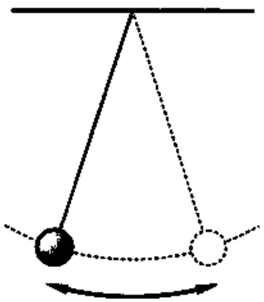


Рис. 308

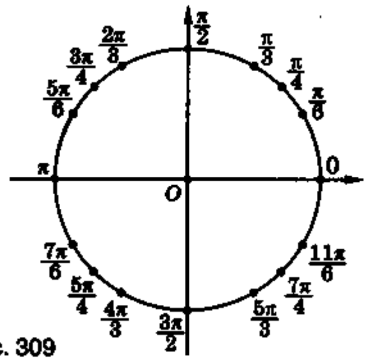


Рис. 309

В этих зависимостях переменная x в формуле $y = ax^2$ интерпретируется как длина a, время t, скорость v, сила тока I. Можно ожидать, что и переменная x под знаком синуса, косинуса, тангенса или котангенса также может иметь интерпретации, отличные от градусной меры угла. Действительно, зависимость смещения x тела от положения равновесия при его колебательном движении от времени t передается формулой $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, где A, ω_0 и φ — постоянные для данного движения величины (рис. 308).

Синусом числа t называется синус угла в t радиан.

Косинусом числа t называется косинус угла в t радиан.

Тангенсом числа t называется отношение синуса этого числа к его косинусу.

Котангенсом числа t называется отношение косинуса этого числа к его синусу.

Найдем значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для наиболее употребительных чисел в пределах от 0 до 2π (рис. 309).

Сначала, учитывая рисунок 309, отметим, что:

$$\sin 0 = \sin 2\pi = 0,\ \cos 0 = \cos 2\pi = 1;\ \sin\frac{\pi}{2} = -1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\sin\pi = 0,\ \cos\pi = -1;\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1,\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0.$$

Вы знаете эти значения для чисел $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Теперь обратим внимание на то, что точки на единичной окружности $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ симметричны соответственно точкам

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ относительно оси ординат, и поэтому их ординаты совпадают, а абсциссы отличаются только знаком. Значит,

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Точки на единичной окружности $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$ симметричны соответственно точкам $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ относительно начала координат, и поэтому их ординаты и абсциссы отличаются только знаком. Значит,

$$\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2},\ \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Наконец, точки $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$ симметричны соответственно точкам $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ относительно начала координат, и поэтому их ординаты и абсциссы отличаются только знаком. Значит,

$$\sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2},\ \cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Видим, что синус, косинус, тангенс и котангенс могут быть разными по знаку. Этот знак зависит от координатной четверти, в которой находится точка единичной окружности.

Если точка находится в первой четверти, то ее ордината и абсцисса обе положительны (рис. 310). Поэтому синус и косинус соответствующего действительного числа t также положительны.

Если точка находится во второй четверти, то ее ордината положительна, а абсцисса отрицательна (рис. 311). Поэтому синус соответствующего числа t положителен, а косинус отрицателен.

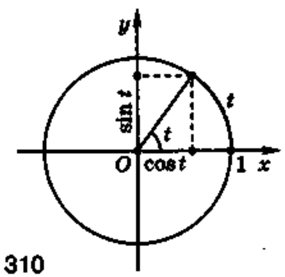


Рис. 310

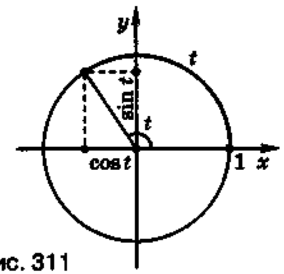


Рис. 311

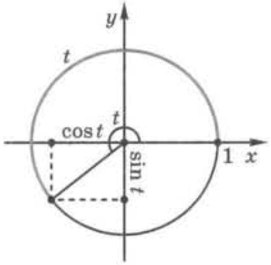


Рис. 312

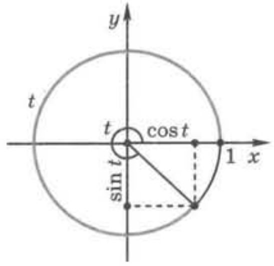


Рис. 313

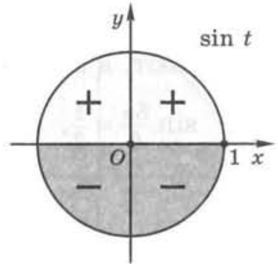


Рис. 314

Если точка находится в третьей четверти, то ее ордината и абсцисса обе отрицательны (рис. 312). Поэтому синус и косинус соответствующего числа t отрицательны.

Если точка находится в четвертой четверти, то ее ордината отрицательна, а абсцисса положительна (рис. 313). Поэтому синус соответствующего числа t отрицателен, а косинус положителен.

Результаты этого исследования изображены на рисунках 314 и 315 для синуса и для косинуса соответственно. Учитывая это и определения тангенса и котангенса, получаем распределение их знаков, изображенное на рисунках 316 и 317 соответственно.

Пример 4. Найдем знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса:

а) угла 1024°; б) числа −10.

а) Точка (1; 0), сделав два оборота против часовой стрелки, т. е. сделав поворот на угол 720°, вернется в начальное положение. После этого еще останется сделать поворот на 1024° − 720°, т. е. на 304°. В результате точка окажется в четвертой четверти (рис. 318). Значит,

$$\sin 1024° < 0,\ \cos 1024° > 0,\ \operatorname{tg} 1024° < 0,\ \operatorname{ctg} 1024° < 0.$$

б) Точка (1; 0), сделав полтора оборота по часовой стрелке, повернется на угол −9,4247... радиан и попадет в точку

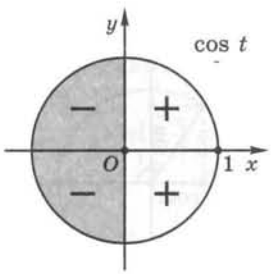


Рис. 315

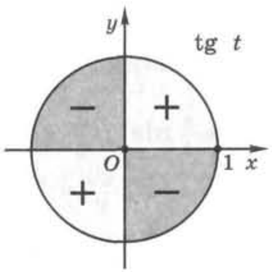


Рис. 316

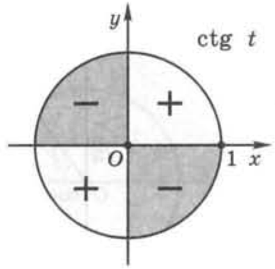


Рис. 317

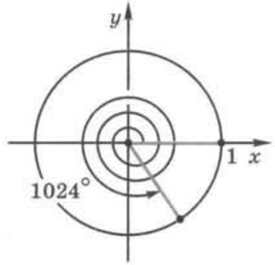


Рис. 318

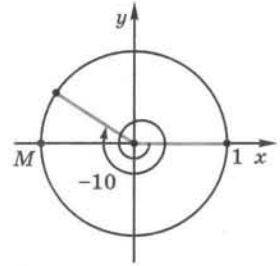


Рис. 319

$M(-1;\ 0)$ (рис. 319). После этого еще останется сделать поворот на −10 − (−9,4247...), т. е. на угол, равный −0,5752... . В результате точка окажется во второй четверти. Значит,

$$\sin(-10) > 0,\ \cos(-10) < 0,\ \operatorname{tg}(-10) < 0,\ \operatorname{ctg}(-10) < 0.$$

Теорема 3. ***Синус, косинус, тангенс и котангенс чисел t и $-t$ связаны равенствами:***

$$\mathbf{\sin(-t) = -\sin t;\ \cos(-t) = \cos t;}$$
$$\mathbf{\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t;\ \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.}$$

Доказательство. Пусть t — определенное действительное число и пусть точка $M_1(x_1;\ y_1)$ единичной окружности получена поворотом точки $M_0(1;\ 0)$ на угол t радиан, а точка $M_2(x_2;\ y_2)$ — на угол $-t$ радиан (рис. 320). Тогда эти точки симметричны относительно оси абсцисс, а поэтому их абсциссы совпадают, а ординаты отличаются только знаком: $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$. Но $x_1 = \cos t$, $y_1 = \sin t$, $x_2 = \cos(-t)$, $y_2 = \sin(-t)$. Значит,

$$\cos(-t) = \cos t,\ \sin(-t) = -\sin t.$$

Теперь, используя определения тангенса и котангенса, получаем:

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

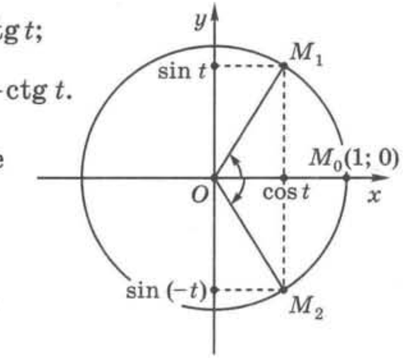


Рис. 320

Пример 5. Найдем значение выражения:

а) $\cos(-135°)$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

а) $\cos(-135°) = \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

Синус, косинус, тангенс и котангенс одного аргумента связаны друг с другом.

Теорема 4. ***Синус, косинус, тангенс и котангенс одного числа t связаны равенствами:***

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \qquad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}; \qquad \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1;$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1; \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

Доказательство. Первое и второе равенства являются определениями. Из них следует, что

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = 1.$$

Пусть t — действительное число, и пусть точка $M_t(x;\ y)$ единичной окружности получена поворотом точки $M_0(1;\ 0)$ на угол в t радиан (рис. 321). Тогда по определениям синуса и косинуса можем записать:

$$y = \sin t,\ x = \cos t. \qquad (1)$$

Точка $M_t(x;\ y)$ — точка единичной окружности, поэтому ее координаты x и y удовлетворяют уравнению этой окружности:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Учитывая равенство (1), получаем:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Четвертое равенство доказано.

Докажем пятое равенство. Для этого обе части равенства $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ разделим на $\cos^2 t$:

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}, \text{ или } 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Подобным образом доказывается и шестое равенство.

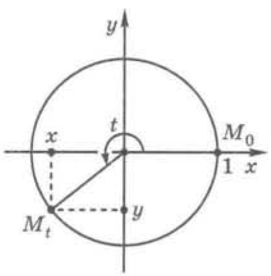


Рис. 321

Доказанные равенства являются тождествами, т. е. они истинны при всех значениях переменных, при которых обе их части имеют значения. Так, например, первое равенство истинно при тех значениях переменной t, при которых $\cos t \neq 0$, а четвертое — при всех значениях t.

Пример 5. Пусть $\sin t = -\frac{7}{25}$ и $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Найдем значения $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Используя формулу $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, найдем, что $|\cos t| = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{25}\right)\left(1 + \frac{7}{25}\right)} = \sqrt{\frac{18 \cdot 32}{25 \cdot 25}} = \frac{24}{25}$.

Поскольку число t таково, что соответствующий ему угол оканчивается в третьей четверти, в которой косинус отрицательный, то $\cos t = -\frac{24}{25}$.

Поскольку $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, то $\operatorname{tg} t = \left(-\frac{7}{25}\right) : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}$.

Поскольку $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$, то $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = 1 : \frac{7}{24} = 3\frac{3}{7}$.

?

1. Что называют синусом угла; косинусом угла; тангенсом угла; котангенсом угла?
2. Что называют синусом числа; косинусом числа; тангенсом числа; котангенсом числа?
3. Чему равны синус, косинус, тангенс, котангенс чисел 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π?
4. Как по координатным четвертям изменяется знак синуса, косинуса, тангенса, котангенса?
5. Запишите тождества, связывающие синус, косинус, тангенс и котангенс чисел t и $-t$.
6. Запишите тождества, связывающие синус, косинус, тангенс, котангенс одного числа.

617. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной из точки (1; 0) поворотом на угол, равный:

а) 90°; в) 180°; д) 450°; ж) 900°;
б) –90°; г) –180°; е) –450°; з) –900°.

618. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной из точки (1; 0) поворотом на угол, равный:

а) π; в) $\frac{3\pi}{2}$; д) 2π; ж) $\frac{27\pi}{2}$;
б) $-\pi$; г) $-\frac{3\pi}{2}$; е) -2π; з) $-\frac{69\pi}{2}$.

619. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной из точки (1; 0) поворотом на угол, равный:

а) 240°; в) 840°; д) 1215°; ж) 1780°;
б) –240°; г) –840°; е) –1215°; з) –1780°.

620. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной из точки (1; 0) поворотом на угол, равный:

а) $\frac{7\pi}{6}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$; в) $\frac{7\pi}{3}$; г) $-\frac{7\pi}{3}$;

д) $\frac{33\pi}{4}$; е) $-\frac{33\pi}{4}$; ж) $\frac{43\pi}{6}$; з) $-\frac{43\pi}{6}$.

621. На единичной окружности отметьте точку, полученную из точки (1; 0) поворотом на угол, равный:

а) $45°$; в) $210°$; д) $495°$; ж) $1050°$;
б) $-45°$; г) $-210°$; е) $-495°$; з) $-1050°$.

622. На единичной окружности отметьте точку, полученную из точки (1; 0) поворотом на угол, равный:

а) $\frac{2\pi}{3}\pi$; в) $\frac{10\pi}{6}$; д) $\frac{21\pi}{4}$; ж) $\frac{25\pi}{6}$;
б) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{10\pi}{6}$; е) $-\frac{21\pi}{4}$; з) $-\frac{25\pi}{6}$.

623. Укажите четверть, в которой расположена точка, полученная из точки (1; 0) поворотом на угол, равный:

а) $321°$; в) $520°$; д) $762°$; ж) $1647°$;
б) $-321°$; г) $-520°$; е) $-762°$; з) $-1647°$.

624. Укажите четверть, в которой расположена точка, полученная из точки (1; 0) поворотом на угол, равный:

а) $\frac{4\pi}{3}$; в) $\frac{15\pi}{7}$; д) $\frac{37\pi}{8}$; ж) $\frac{91\pi}{12}$;
б) $-\frac{4\pi}{3}$; г) $-\frac{15\pi}{7}$; е) $-\frac{37\pi}{8}$; з) $-\frac{91\pi}{12}$.

625. Определите четверть, в которой расположена точка, полученная из точки (1; 0) поворотом на угол, равный:

а) 1; в) 2,87; д) 5,12; ж) 27,4;
б) −2; г) −3,16; е) −6,31; з) −33,9.

626. Определите знак $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, учитывая, что значение переменной x равно:

а) $234°$; в) $753°$; д) $7941°$;
б) $-234°$; г) -753; е) $-17\,941°$.

627. Определите знак $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, учитывая, что значение переменной x равно:

а) $\frac{4\pi}{5}$; в) $4\frac{2}{25}\pi$; д) 5,59; ж) 7,9;
б) $-1\frac{7}{20}\pi$; г) $-4\frac{2}{25}\pi$; е) −5,59; з) −7,9.

628. Определите, какой знак имеет выражение:

а) $\sin 201° \cdot \sin 299°$;
б) $\operatorname{tg} 145° \cdot \operatorname{ctg} 297°$;
в) $\sin 195° \cdot \operatorname{tg}(-203°)$;
г) $\cos(-243°) \cdot \sin 111°$;
д) $\cos 43° \cdot \sin 121° \cdot \operatorname{tg} 149°$;
е) $\sin 196° \cdot \cos 916° \cdot \operatorname{ctg} 1276°$;
ж) $\operatorname{tg} 96° \cdot \operatorname{ctg}(-196°) \cdot \cos(-296°)$;
з) $\sin(-1000°) \cdot \cos 835° \cdot \operatorname{tg}(-380°)$.

629. Определите, какой знак имеет выражение:

а) $\cos 1{,}1\pi \cdot \cos 1{,}7\pi$;
б) $\cos 1{,}08\pi \cdot \operatorname{tg} 1{,}13\pi$;
в) $\sin\frac{5\pi}{4} \cdot \cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$;
г) $\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{5}\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{33\pi}{20}$;
д) $\sin 0{,}4\pi \cdot \cos\frac{13\pi}{20} \cdot \operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}$;
е) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{20} \cdot \operatorname{ctg}\frac{29\pi}{25} \cdot \sin 2{,}74\pi$;
ж) $\cos\frac{111\pi}{20} \cdot \sin\left(-\frac{116\pi}{25}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{21\pi}{10}\right)$;
з) $\cos\left(-\frac{27\pi}{25}\right) \cdot \sin 5{,}09\pi \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{177\pi}{25}\right)$.

630. Найдите значение синуса, косинуса, тангенса, котангенса угла, равного:

а) $-30°$; в) $-45°$; д) $-60°$; ж) $-90°$; и) $-120°$;
б) $-300°$; г) $-315°$; е) $-360°$; з) $-270°$; к) $-240°$.

631. Найдите значение синуса, косинуса, тангенса, котангенса угла, равного:

а) $-\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{6}$; д) $-\frac{4\pi}{3}$; ж) $-\frac{11\pi}{6}$; и) $-\frac{7\pi}{4}$;
б) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{5\pi}{6}$; е) $-\frac{5\pi}{3}$; з) $-\frac{3\pi}{4}$; к) $-\frac{7\pi}{6}$.

632. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}$;
б) $\sin 2\pi + \cos 0$;
в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2}$;
г) $\sin\pi + \sin 1{,}5\pi$;
д) $\sin\pi - \cos\pi$;
е) $\cos 0 + \cos\frac{3\pi}{2}$;
ж) $\sin\pi : \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;
з) $\cos 0 : \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;
и) $\cos\frac{3\pi}{2} : \sin\frac{\pi}{4}$.

633. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
б) $\operatorname{tg} 2\pi : \cos 2\pi$;
в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\pi$;
г) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} - \sin 0{,}5\pi$;
д) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} + \operatorname{tg}\pi$;
е) $\cos\pi \cdot \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$;
ж) $\sin\pi : \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;
з) $\operatorname{tg}\pi - \sin\frac{\pi}{2}$;
и) $\operatorname{tg}\pi \cdot \cos\frac{\pi}{2}$.

634. Найдите значение выражения:

а) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$;

б) $\cos^{11}(-\pi)\,\mathrm{ctg}^7\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin^5\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^2\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$;

в) $\left(3-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right):2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-3\,\mathrm{ctg}^5\left(-\frac{\pi}{4}\right)+3\frac{7}{12}\,\mathrm{tg}^7(-\pi)+14\cos^{12}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

635. Непосредственной проверкой докажите истинность равенства:

а) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}=1$; г) $\sin^2\frac{7\pi}{4}+\cos^2\frac{7\pi}{4}=1$;

б) $\sin^2\frac{2\pi}{3}+\cos^2\frac{2\pi}{3}=1$; д) $\sin^2\frac{8\pi}{3}+\cos^2\frac{8\pi}{3}=1$;

в) $\sin^2\frac{7\pi}{6}+\cos^2\frac{7\pi}{6}=1$; е) $\sin^2\frac{17\pi}{6}+\cos^2\frac{17\pi}{6}=1$.

636. Найдите значение выражения:

а) $4\sin\frac{\pi}{6}-3\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{3}$;

б) $7\sin\frac{\pi}{6}+4\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}-11\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}$;

в) $\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}\right):\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}$;

г) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}:\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{3}$;

д) $\left(2\sin\frac{\pi}{6}-4\cos\frac{\pi}{3}\right)^3\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{3}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}$;

е) $\sin 0{,}5\pi:\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2\pi:\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}$.

637. На единичной окружности изобразите точки, соответствующие углам, которые удовлетворяют равенству:

а) $\sin\beta=\frac{1}{2}$; г) $\mathrm{ctg}\,\delta=\sqrt{3}$; ж) $\mathrm{tg}\,\tau=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; д) $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\mathrm{ctg}\,\varepsilon=-\sqrt{3}$;

в) $\mathrm{tg}\,\gamma=1$; е) $\cos\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $\mathrm{tg}\,\lambda=-1$.

638. На единичной окружности изобразите точки, соответствующие углам, которые удовлетворяют равенству:

а) $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\mathrm{ctg}\,\delta=-1$; ж) $\mathrm{tg}\,\tau=-\sqrt{3}$;

б) $\cos\alpha=-1$; д) $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\mathrm{ctg}\,\varepsilon=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\mathrm{tg}\,\gamma=0$; е) $\cos\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $\mathrm{tg}\,\lambda=\sqrt{3}$.

639. Учитывая, что $\sin x=\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, найдите:

а) $\cos x$; б) $\mathrm{tg}\,x$; в) $\mathrm{ctg}\,x$.

640. Учитывая, что $\cos z=\frac{9}{41}$ и $\frac{3\pi}{2}<z<2\pi$, найдите:

а) $\sin z$; б) $\mathrm{tg}\,z$; в) $\mathrm{ctg}\,z$.

641. Учитывая, что $\mathrm{tg}\,a=\frac{7}{24}$ и $\pi<a<\frac{3\pi}{2}$, найдите:

а) $\mathrm{ctg}\,a$; б) $\cos a$; в) $\sin a$.

642. Учитывая, что $\mathrm{ctg}\,y=\frac{61}{60}$ и $0<y<\frac{\pi}{2}$, найдите:

а) $\mathrm{tg}\,y$; б) $\sin y$; в) $\cos y$.

643. Найдите значения $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}\,x$, учитывая, что $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ и:

а) $\sin x=\frac{15}{17}$; в) $\sin x=-\frac{11}{61}$;

б) $\sin x=\frac{21}{29}$; г) $\sin x=-\frac{65}{97}$.

644. Найдите значения $\sin c$, $\mathrm{tg}\,c$, $\mathrm{ctg}\,c$, учитывая, что $\pi<c<2\pi$ и:

а) $\cos c=\frac{3}{5}$; в) $\cos c=-\frac{28}{53}$;

б) $\cos c=\frac{5}{13}$; г) $\cos c=-\frac{24}{143}$.

645. Найдите значения $\mathrm{ctg}\,d$, $\cos d$, $\sin d$, учитывая, что $3\pi<d<4\pi$ и:

а) $\mathrm{tg}\,d=\frac{40}{41}$; б) $\mathrm{tg}\,d=1\frac{1}{21}$; в) $\mathrm{tg}\,d=-\frac{56}{65}$; г) $\mathrm{tg}\,d=-\frac{105}{137}$.

646. Найдите значения $\mathrm{tg}\,z$, $\sin z$, $\cos z$, учитывая, что $-\frac{\pi}{2}<z<\frac{\pi}{2}$ и:

а) $\mathrm{ctg}\,z=1\frac{2}{15}$; в) $\mathrm{ctg}\,z=-\frac{63}{65}$;

б) $\mathrm{ctg}\,z=\frac{55}{73}$; г) $\mathrm{ctg}\,z=-\frac{195}{197}$.

647. Упростите выражение:

а) $1-\sin^2 x$;
б) $\sin^4 y-\cos^4 y+\cos^2 y$;
в) $\sin^4 z+\cos^4 z+2\sin^2 z\cos^2 z$;
г) $(\sin t-\cos t)^2+(\sin t+\cos t)^2$;
д) $\sin^2 u+\cos^2 u+\cos^2 u\cdot\sin^2 u$;
е) $\sin^4 v-\cos^4 v+\cos^2 u-\sin^2 v$.

648. Упростите выражение:

а) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; в) $\frac{\sin^3\delta+\cos^3\delta}{\sin\delta\cos\delta-1}$;

б) $\frac{2\cos^2\beta-1}{1-2\sin^2\beta}$; г) $\frac{\sin^3\varphi-\cos^3\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi+1}$.

649. Упростите выражение:

а) $\cos x+\operatorname{ctg} x\cdot\sin x$; г) $\sin^2 u\cdot\operatorname{ctg}^2 u-\sin^2 u+1$;

б) $\sin^2 y+\operatorname{tg}^2 y-\frac{1}{\cos^2 y}$; д) $\cos^2 v\cdot(1+\operatorname{tg}^2 v)$;

в) $\operatorname{tg}^2 z+\sin^2 z+\cos^2 z$; е) $\frac{\operatorname{tg}^4\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+2$.

650. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;

б) $\frac{\cos^2\delta-\operatorname{ctg}^2\delta}{\sin^2\delta-\operatorname{tg}^2\delta}$;

в) $\frac{\operatorname{tg}^3\beta+\operatorname{ctg}^3\beta}{(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\beta)^2+1}$.

651. Докажите тождество:

а) $\sin^4 a-\cos^4 a=\sin^2 a-\cos^2 a$;
б) $\sin^2 b-\cos^2 c=\cos^2 c-\cos^2 b$;
в) $\operatorname{ctg}^2 d\cdot\cos^2 d=\operatorname{ctg}^2 d-\cos^2 d$;

г) $\frac{1+\cos b}{\sin b}=\frac{\sin b}{1-\cos b}$;

д) $\frac{1-2\sin^2 t}{2\cos^2 t-1}=1$;

е) $\frac{\operatorname{tg}^2 g-1}{\operatorname{tg} g}+\frac{(\operatorname{tg}^2 g-1)(\operatorname{tg}^4 g+1)}{\operatorname{tg}^3 g}=\operatorname{tg}^3 g-\operatorname{ctg}^3 g$.

652. Докажите тождество:

а) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\frac{2\sin^2\beta-1}{1-2\cos^2\beta}-\frac{\cos^2\beta-1}{1-\sin^2\beta}=\frac{1}{\cos^2\beta}$;

в) $\frac{1+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}^2\gamma}{1+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}^2\gamma}=\operatorname{tg}^2\gamma$;

г) $\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\sin\alpha+\cos\alpha$;

д) $\frac{1-4\sin^2\delta\cos^2\delta}{(\sin\delta-\cos\delta)^2}=1-2\sin\delta\cos\delta$;

е) $\frac{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi+\cos^4\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+\sin^4\varphi}=\operatorname{tg}^4\varphi$.

---

653. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его углов равна:

а) 1080°; б) 1440°; в) 1980°; г) 3420°?

654. Длина ломаной *ABKLDA*, образованной ребрами *AB*, *AD*, *DL*, *LK* куба и диагональю *BK* его боковой грани (рис. 322), равна 16 см. Найдите поверхность куба.

655. В треугольной пирамиде *QKLM*, все грани которой — правильные треугольники, проведены средние линии *AB* и *BC* граней *QLM* и *QLK* (рис. 323). Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что длина пространственной ломаной *ABCLMA* равна 27 см.

656. Произведение диагоналей ромба, который является основанием прямого параллелепипеда, равно 192 см^2, радиус вписанной в него окружности — 4,8 см, а диагональ боковой грани — 26 см. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

657. Ребро основания правильной треугольной пирамиды и ее боковое ребро соответственно равны k и l. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через две вершины основания и середину бокового ребра.

658. Найдите полную поверхность прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что диагонали его граней равны 5 см, $\sqrt{41}$ см и $\sqrt{34}$ см.

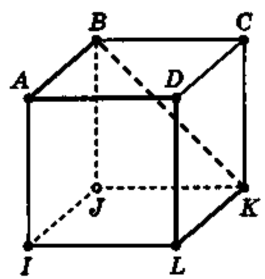


Рис. 322

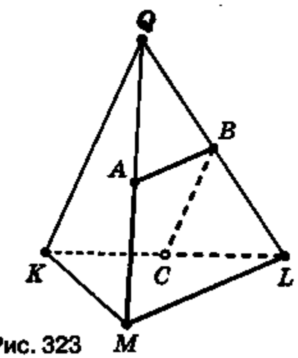


Рис. 323

659. Точка B делит отрезок AC пополам. Определите радиус окружности, которая касается окружностей, построенных на отрезках AB, BC и AC как на диаметрах, учитывая, что $AB = a$.

660. В треугольник со сторонами 7, 8 и 13 вписана окружность. Еще одна окружность касается ее и двух меньших сторон треугольника. Определите радиус этой окружности.

661. Учитывая, что S — площадь треугольника со сторонами a, b и c, p — полупериметр, r — радиус вписанной в треугольник окружности, r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей, которые касаются соответствующих сторон (рис. 324), докажите равенства

$$S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c = \sqrt{rr_ar_br_c}.$$

662. С двух участков вместе собрали 590 ц ячменя, при этом урожайность на первом из них составила 26 ц/га, а площадь второго равна 12 га. Найдите урожайность на втором участке, учитывая, что средняя урожайность на обоих участках оказалась равной 23,6 ц/га.

663. Велосипедист ехал сначала со скоростью 16 км/ч, а затем снизил ее до 12 км/ч и с меньшей скоростью проехал на 19 км меньше. Найдите путь, который проехал велосипедист, учитывая, что средняя скорость на всем пути оказалась равной 14,8 км/ч.

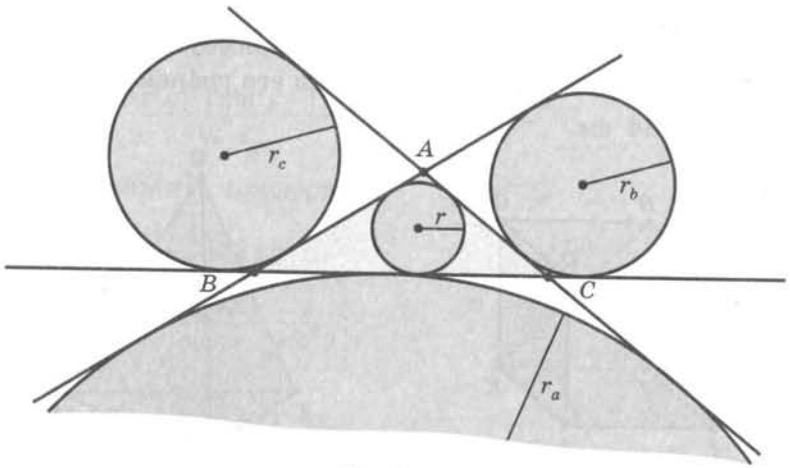


Рис. 324

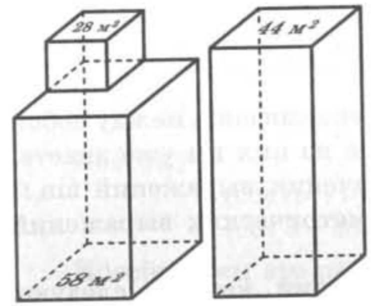


Рис. 325

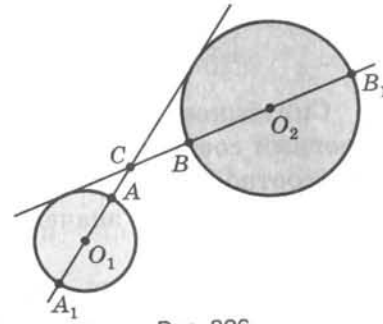


Рис. 326

664. Есть два прямоугольных параллелепипеда. У одного площадь основания равна 28 м², у второго — 58 м² и объем второго на 268 м³ больше (рис. 325). Найдите объемы параллелепипедов, учитывая, что третий параллелепипед с объемом, равным суммарному объему первого и второго параллелепипедов, и высотой, равной сумме их высот, имеет площадь основания 44 м².

* * *

665. Найдите площадь треугольника ABC, учитывая, что его медиана AM перпендикулярна биссектрисе BL и $AM = m$, $BL = l$.

666. Возрастающая последовательность $a(n)$ принимает натуральные значения и при всех натуральных значениях k удовлетворяет условию $a(a(k)) = 3k$. Найдите $a(2008)$.

667. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 не имеют общих точек. Прямая, проходящая через точку O_1 и касающаяся второй окружности, пересекает первую в точках A и A_1, а прямая, проходящая через точку O_2 и касающаяся первой окружности, пересекает вторую в точках B и B_1 (рис. 326). Учитывая, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются, точки A и B лежат по одну сторону от прямой O_1O_2 и отрезки AB и A_1B_1 соответственно равны m и n, найдите O_1O_2.

14. Формулы сложения. Формулы приведения

Синус, косинус, тангенс и котангенс связаны между собой многими соотношениями. Некоторые из них вы уже знаете. Это соотношения, связывающие значения выражений $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$, значения тригонометрических выражений для чисел $-t$ и t.

Установим теперь группу соотношений, которые следуют из свойств поворотов. Поворот точки на угол $u + v$ можно рассматривать как композицию (последовательное выполнение) поворота на угол u и поворота на угол v.

Теорема 5. ***Для любых действительных чисел u и v истинны равенства:***

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v;$$
$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v;$$
$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v;$$
$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

Доказательство. Пусть u и v — действительные числа, и пусть точки M_1, M_2, M_3 единичной окружности получены поворотом точки $M_0(1;\ 0)$ на углы u, $u+v$, $-v$ радиан соответственно (рис. 327). Тогда по определениям косинуса и синуса координаты этих точек следующие:

$$M_1(\cos u;\ \sin u),\ M_2(\cos(u+v);\ \sin(u+v)),$$
$$M_3(\cos(-v);\ \sin(-v)).$$

Поскольку поворот на угол $u + v$ радиан есть композиция поворотов на угол u радиан и угол v радиан, то угол M_1OM_2 равен v радиан, и, значит, углы M_1OM_2 и M_0OM_3 равны друг другу. Если к этим углам прибавить по углу M_0OM_1, то получатся также равные углы M_0OM_2 и M_3OM_1. Учитывая, что прилежащие к этим углам стороны треугольников M_0OM_2 и M_3OM_1 являются радиусами одной окружности, можем утверждать, что треугольники M_0OM_2 и M_3OM_1 равны. Поэтому равны их соответствующие стороны M_0M_2 и M_3M_1, и, значит,

$$M_0M_2^2 = M_3M_1^2.$$

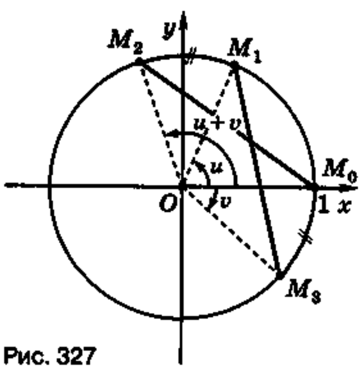


Рис. 327

Но, по формуле расстояния между точками, получаем:

$$M_0M_2^2 = (\cos(u+v) - 1)^2 + (\sin(u+v) - 0)^2;$$
$$M_3M_1^2 = (\cos u - \cos(-v))^2 + (\sin u - \sin(-v))^2.$$

Поэтому

$$(\cos(u+v) - 1)^2 + (\sin(u+v) - 0)^2 =$$
$$= (\cos u - \cos(-v))^2 + (\sin u - \sin(-v))^2.$$

Преобразуем это равенство:

$$(\cos(u+v) - 1)^2 + (\sin(u+v) - 0)^2 =$$
$$= (\cos u - \cos(-v))^2 + (\sin u - \sin(-v))^2 \overset{(1)}{\equiv}$$
$$\equiv (\cos(u+v) - 1)^2 + \sin^2(u+v) =$$
$$= (\cos u - \cos v)^2 + (\sin u + \sin v)^2 \overset{(2)}{\equiv}$$
$$\equiv \cos^2(u+v) + 1 - 2\cos(u+v) + \sin^2(u+v) =$$
$$= \cos^2 u + \cos^2 v - 2\cos u \cos v + \sin^2 u + \sin^2 v + 2\sin u \sin v \overset{(3)}{\equiv}$$
$$\equiv (\cos^2(u+v) + \sin^2(u+v)) + 1 - 2\cos(u+v) =$$
$$= (\cos^2 u + \sin^2 u) + (\cos^2 v + \sin^2 v) - 2\cos u \cos v + 2\sin u \sin v \overset{(4)}{\equiv}$$
$$\equiv 1 + 1 - 2\cos(u+v) = 1 + 1 - 2\cos u \cos v + 2\sin u \sin v \equiv$$
$$\equiv 2 - 2\cos(u+v) = 2 - 2\cos u \cos v + 2\sin u \sin v \equiv$$
$$\equiv -2\cos(u+v) = -2\cos u \cos v + 2\sin u \sin v \equiv$$
$$\equiv \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v.$$

Здесь мы использовали: (1) — тождества, установленные теоремой 3; (2) — формулы квадрата суммы и разности двух выражений; (3) — группировку слагаемых алгебраической суммы; (4) — тождество $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Первое равенство доказано. Чтобы установить второе равенство, заменим в первом равенстве выражение v выражением $-v$:

$$\cos(u-v) = \cos u \cos(-v) - \sin u \sin(-v) \equiv$$
$$\equiv \cos(u-v) = \cos u \cos v - \sin u(-\sin v) \equiv$$
$$\equiv \cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.$$

Прежде чем доказывать третье равенство, установим равенства:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t;\ \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t.$$

Используя вторую формулу, получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos t + \sin\frac{\pi}{2}\sin t \equiv$$
$$\equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 0 \cdot \cos t + 1 \cdot \sin v \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.$$

В доказанной формуле $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$ выражение t заменим выражением $\frac{\pi}{2}-t$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\equiv\cos t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\equiv\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t.$$

Теперь докажем третью формулу:

$$\sin(u+v)\overset{(1)}{=}\cos\left(\frac{\pi}{2}-(u+v)\right)\overset{(2)}{=}\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+v\right)\overset{(3)}{=}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cos v+\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\sin v\overset{(4)}{=}\sin u\cos v+\cos u\sin v.$$

Здесь мы использовали: (1) — формулу $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$ при ее прочтении справа налево; (2) — перегруппировку членов алгебраической суммы; (3) — доказанную формулу косинуса разности; (4) — формулы $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$ и $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$.

Чтобы получить четвертую формулу, в третьей формуле заменим выражение v выражением $-v$:

$$\sin(u-v)=\sin u\cos(-v)-\cos u\sin(-v)\equiv$$

$$\equiv\sin(u-v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v.$$

Следствие. ***Равенства***

$$\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v}{1-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v};\quad \operatorname{tg}(u-v)=\frac{\operatorname{tg}u-\operatorname{tg}v}{1+\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v};$$

$$\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v=\frac{\sin(u+v)}{\cos u\cdot\cos v};\quad \operatorname{tg}u-\operatorname{tg}v=\frac{\sin(u-v)}{\cos u\cdot\cos v}$$

являются тождествами.

Нужно убедиться, что записанные равенства истинны при всех значениях переменных, при которых обе их части имеют значения.

Первую формулу можно получить, если использовать определение тангенса и доказанные формулы для $\sin(u+v)$ и $\cos(u+v)$:

$$\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)}=\frac{\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos u\cos v-\sin u\sin v}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin u\cos v}{\cos u\cos v}+\dfrac{\cos u\sin v}{\cos u\cos v}}{\dfrac{\cos u\cos v}{\cos u\cos v}-\dfrac{\sin u\sin v}{\cos u\cos v}}=\frac{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v}{1-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v}.$$

Вторую формулу получаем, заменив в первой формуле выражение v выражением $-v$:

$$\operatorname{tg}(u-v)=\frac{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}(-v)}{1-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}(-v)}=\frac{\operatorname{tg}u-\operatorname{tg}v}{1+\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v}.$$

Две остальные формулы получаем, используя определение тангенса и формулы для $\sin(u+v)$ и $\sin(u-v)$:

$$\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v=\frac{\sin u}{\cos u}+\frac{\sin v}{\cos v}=\frac{\sin u\cdot\cos v+\cos u\cdot\sin v}{\cos u\cdot\cos v}=\frac{\sin(u+v)}{\cos u\cdot\cos v};$$

$$\operatorname{tg}u-\operatorname{tg}v=\frac{\sin u}{\cos u}-\frac{\sin v}{\cos v}=\frac{\sin u\cdot\cos v-\cos u\cdot\sin v}{\cos u\cdot\cos v}=\frac{\sin(u-v)}{\cos u\cdot\cos v}.$$

Пример 1. Найдем $\cos 15°$ и $\operatorname{tg} 75°$. Имеем:

$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{tg}75°=\operatorname{tg}(45°+30°)=$$

$$\frac{\operatorname{tg}45°+\operatorname{tg}30°}{1-\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°}=\frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}.$$

С помощью установленных формул сложения легко доказываются *формулы приведения*, которые дают возможность сводить нахождение значений выражений $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ к нахождению их значений для аргумента из промежутка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Формулы приведения отражают симметрию точек единичной окружности относительно координатных осей.

Теорема 6. ***Истинны формулы:***

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm t\right)=\cos t;\qquad \sin(\pi\pm t)=\mp\sin t;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm t\right)=-\cos t;\qquad \sin(2\pi\pm t)=\pm\sin t;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm t\right)=\mp\sin t;\qquad \cos(\pi\pm t)=-\cos t;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm t\right)=\pm\sin t;\qquad \cos(2\pi\pm t)=\cos t;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm t\right)=\mp\operatorname{ctg} t;\qquad \operatorname{tg}(\pi\pm t)=\pm\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm t\right)=\mp\operatorname{ctg} t;\qquad \operatorname{tg}(2\pi\pm t)=\pm\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t; \qquad \operatorname{ctg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t; \qquad \operatorname{ctg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t.$$

Доказательство. Формулы для синуса и косинуса доказываются по одной схеме. Докажем, например, формулы $\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t$. Имеем:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos t \mp \sin\frac{3\pi}{2}\sin t =$$
$$= 0 \cdot \cos t \mp (-1) \cdot \sin t = \pm \sin t.$$

Доказательство формул для тангенса и котангенса можно провести с использованием определений тангенса и котангенса и формул приведения для синуса и косинуса. Докажем, например, формулы $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t$. Получаем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)} = \frac{\cos t}{\mp \sin t} = \mp \operatorname{ctg} t.$$

Формулы, составляющие содержание теоремы 6, позволяет запомнить следующее мнемоническое[1] правило: а) знак правой части определяется знаком левой, если считать, что значение переменной t принадлежит промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) если первое слагаемое A аргумента $A \pm t$ есть π или 2π, то название функции не изменяется, а если слагаемое A есть $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то название функции изменяется: sin на cos; cos на sin; tg на ctg; ctg на tg.

? 1. Запишите формулы сложения для косинуса суммы и разности двух чисел.

2. Запишите формулы сложения для синуса суммы и разности двух чисел.

3. Запишите формулы сложения для тангенса суммы и разности двух чисел.

4. Сформулируйте мнемоническое правило, позволяющее записать любую формулу приведения.

668. Упростите выражение:

а) $\cos\alpha\cos3\alpha - \sin\alpha\sin3\alpha$;

б) $\cos3\beta\cos5\beta - \sin3\beta\sin5\beta$;

[1] Мнемоника — (греч. μνεμονικα) совокупность приемов, которые делают более легким запоминание посредством образования искусственных ассоциаций.

в) $\sin2\gamma\cos3\gamma - \cos2\gamma\sin3\gamma$;

г) $\cos3\delta\sin7\delta - \sin3\delta\cos7\delta$;

д) $(\operatorname{tg}4\varepsilon + \operatorname{tg}3\varepsilon) : (1 - \operatorname{tg}4\varepsilon\operatorname{tg}3\varepsilon)$;

е) $(\operatorname{tg}2\tau - \operatorname{tg}8\tau) : (1 + \operatorname{tg}2\tau\operatorname{tg}8\tau)$;

ж) $(1 - \operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}2\omega) : (\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}2\omega)$;

з) $(1 + \operatorname{tg}2\varphi\operatorname{tg}4\varphi) : (\operatorname{tg}2\varphi - \operatorname{tg}4\varphi)$.

669. Вычислите:

а) $\cos57^\circ\cos123^\circ - \sin57^\circ\sin123^\circ$;

б) $\cos121^\circ\cos31^\circ + \sin121^\circ\sin31^\circ$;

в) $\sin57^\circ\cos123^\circ + \cos57^\circ\sin123^\circ$;

г) $\sin121^\circ\cos31^\circ - \cos121^\circ\sin31^\circ$.

670. Вычислите:

а) $\cos57^\circ30'\cos27^\circ30' + \sin57^\circ30'\sin27^\circ30'$;

б) $\cos21^\circ30'\cos23^\circ30' - \sin21^\circ30'\sin23^\circ30'$;

в) $\sin57^\circ30'\cos27^\circ30' - \cos57^\circ30'\sin27^\circ30'$;

г) $\sin21^\circ30'\cos23^\circ30' + \cos21^\circ30'\sin23^\circ30'$.

671. Вычислите:

а) $\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{13\pi}{9}$;

б) $\cos\frac{13\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11} + \sin\frac{13\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}$;

в) $\sin\frac{5\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{13\pi}{9}$;

г) $\sin\frac{13\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11} - \cos\frac{13\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}$.

672. Вычислите:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}57^\circ30' - \operatorname{tg}27^\circ30'}{1 + \operatorname{tg}57^\circ30'\operatorname{tg}27^\circ30'}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}21^\circ30' + \operatorname{tg}23^\circ30'}{1 - \operatorname{tg}21^\circ30'\operatorname{tg}23^\circ30'}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{9} + \operatorname{tg}\frac{13\pi}{9}}{1 - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{9}\cdot\operatorname{tg}\frac{13\pi}{9}}$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{13\pi}{11} - \operatorname{tg}\frac{2\pi}{11}}{1 + \operatorname{tg}\frac{13\pi}{11}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{11}}$.

673. Вычислите:

а) $(\operatorname{tg}57^\circ + \operatorname{tg}123^\circ) : (1 - \operatorname{tg}57^\circ\operatorname{tg}123^\circ)$;

б) $(1 + \operatorname{tg}157^\circ\operatorname{tg}67^\circ) : (\operatorname{tg}157^\circ - \operatorname{tg}67^\circ)$;

в) $(\operatorname{tg}121^\circ - \operatorname{tg}31^\circ) : (1 + \operatorname{tg}121^\circ\operatorname{tg}31^\circ)$;

г) $(1 - \operatorname{tg}190^\circ\operatorname{tg}80^\circ) : (\operatorname{tg}190^\circ + \operatorname{tg}80^\circ)$.

674. Упростите выражение:

а) $\cos\left(\frac{2\pi}{7}-a\right)\cos\left(\frac{3\pi}{14}+a\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{7}-a\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}+a\right)$;

б) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}+u\right)\cos\left(\frac{7\pi}{12}-u\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}+u\right)\sin\left(\frac{7\pi}{12}-u\right)$;

в) $\sin\left(\frac{2\pi}{7}-c\right)\cos\left(\frac{3\pi}{14}+c\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}-c\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}+c\right)$;

г) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}+r\right)\sin\left(\frac{7\pi}{12}-r\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{12}+r\right)\cos\left(\frac{7\pi}{12}-r\right)$.

675. Упростите выражение:

а) $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18}-x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{9}+x\right)\right):\left(1-\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{9}+x\right)\right)$;

б) $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18}-y\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}+y\right)\right):\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18}-y\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}+y\right)\right)$;

в) $\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20}-z\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}+z\right)\right):\left(\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20}-z\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}+z\right)\right)$;

г) $\left(1-\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20}-t\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5}+t\right)\right):\left(\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20}+t\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5}-t\right)\right)$.

676. Найдите значение выражения:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$, учитывая, что $\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0<x<\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, учитывая, что $\cos x=-\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<x<\pi$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$, учитывая, что $\sin y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$;

г) $\sin\left(z-\frac{2\pi}{3}\right)$, учитывая, что $\operatorname{tg} z=-\frac{4}{3}$ и $\frac{3\pi}{2}<z<2\pi$.

677. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}+s\right)$, учитывая, что $\sin s=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2}<s<\pi$;

б) $\operatorname{tg}\left(u-\frac{5\pi}{3}\right)$, учитывая, что $\operatorname{ctg} u=-\frac{4}{3}$ и $\frac{3\pi}{2}<u<2\pi$;

в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{4}+v\right)$, учитывая, что $\sin v=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}<v<2\pi$;

г) $\operatorname{ctg}\left(t-\frac{11\pi}{6}\right)$, учитывая, что $\operatorname{tg} t=-\frac{5}{3}$ и $\frac{3\pi}{2}<t<2\pi$.

678. Упростите выражение:

а) $\frac{\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}33^\circ}{1-\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}33^\circ}$;

б) $\frac{1+\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}72^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}72^\circ}$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}+\operatorname{tg}\frac{25\pi}{21}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{25\pi}{21}}$;

г) $\frac{1+\operatorname{tg}\frac{28\pi}{15}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{\operatorname{tg}\frac{28\pi}{15}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}$;

д) $\frac{\operatorname{tg}\frac{29\pi}{18}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}}{1-\operatorname{tg}\frac{29\pi}{18}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}}$;

е) $\frac{1+\operatorname{tg}\frac{11\pi}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{11\pi}{8}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$.

679. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}15^\circ$;
б) $\operatorname{ctg}15^\circ$;
в) $\sin 75^\circ$;
г) $\cos 75^\circ$;
д) $\operatorname{ctg}75^\circ$;
е) $\cos 105^\circ$;
ж) $\operatorname{tg}105^\circ$;
з) $\operatorname{ctg}105^\circ$;
и) $\sin 165^\circ$;
к) $\cos 165^\circ$;
л) $\operatorname{tg}165^\circ$;
м) $\operatorname{ctg}165^\circ$.

680. Упростите выражение:

а) $\sin(-u)\cos(-v)+\sin(u+v)$;

б) $\sin(y-z)-\sin(-y)\cos(-z)$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\sin(s-t)$;

г) $\sin(\beta+\gamma)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\sin(-\gamma)$;

д) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-f\right)+\cos\left(f+\frac{\pi}{3}\right)$;

е) $\sin\left(g+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-g\right)$;

ж) $\frac{2\cos k\sin l+\sin(k-l)}{2\cos k\cos l-\cos(k-l)}$;

з) $\frac{\cos x\cos t-\cos(x+t)}{\cos(x-t)-\sin x\cos t}$.

681. Найдите значение выражения:

а) $\cos(x+y)$ и $\cos(x-y)$, учитывая, что $\cos x=\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ и $\sin y=\frac{8}{17}$, $0<y<\frac{\pi}{2}$;

б) $\sin(u+v)$ и $\cos(u-v)$, учитывая, что $\cos u=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<u<\pi$ и $\sin v=-\frac{12}{13}$, $\pi<v<\frac{3\pi}{2}$;

в) $\operatorname{tg}(i+j)$ и $\operatorname{tg}(i-j)$, учитывая, что $\operatorname{tg} i=-\frac{11}{60}$, $\frac{\pi}{2}<i<\pi$ и $\operatorname{ctg} j=3\frac{15}{16}$, $\pi<j<\frac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}(r+s)$ и $\operatorname{ctg}(r-s)$, учитывая, что $\operatorname{ctg} r=6\frac{6}{13}$, $\pi<r<\frac{3\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} s=-2{,}4$, $\frac{\pi}{2}<s<\pi$.

682. Докажите тождество:

а) $\sin(x-y)\sin(x+y)=\sin^2 x-\sin^2 y$;

б) $\cos(t-v)\cos(t+v)=\cos^2 t-\sin^2 v$;

в) $\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sqrt{2}\cos x}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sqrt{3}\sin x}=\sqrt{2}\operatorname{tg}x$;

г) $\frac{\cos y-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+y\right)}{2\sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin y}=-\sqrt{3}\operatorname{tg}t$;

д) $\frac{\sin(s+t)}{\sin(s-t)}=\frac{\operatorname{tg}s+\operatorname{tg}t}{\operatorname{tg}s-\operatorname{tg}t}$;

е) $\frac{\cos(s-t)}{\cos(s+t)}=\frac{\operatorname{ctg}s\operatorname{ctg}t+1}{\operatorname{ctg}s\operatorname{ctg}t-1}$.

683. Найдите значение выражения:

а) $\sin(x+y)$, учитывая, что $\cos x = -\frac{9}{41}$, $\cos y = \frac{60}{61}$, а углы x и y оканчиваются в третьей и четвертой четвертях соответственно;

б) $\sin(x-y)$, учитывая, что $\cos x = -\frac{28}{53}$, $\sin y = \frac{5}{13}$, а углы x и y оканчиваются в третьей и первой четвертях соответственно;

в) $\sin(x+y)$, учитывая, что $\cos x = \frac{5}{13}$, $\sin y = -\frac{4}{5}$, а углы u и v оканчиваются в первой и третьей четвертях соответственно;

г) $\cos(x+y)$, учитывая, что $\cos x = -\frac{9}{41}$, $\sin y = \frac{40}{41}$, а углы x и y оканчиваются в третьей и второй четвертях соответственно;

д) $\cos(a-b)$, учитывая, что $\sin a = \frac{20}{29}$, $\cos b = -\frac{7}{25}$, а углы a и b оканчиваются во второй четверти;

е) $\sin(a-b)$, учитывая, что $\cos a = -\frac{15}{17}$, $\sin b = -\frac{3}{5}$, а углы a и b оканчиваются во второй и четвертой четвертях соответственно;

ж) $\cos(g+h)$ и $\cos(g-h)$, учитывая, что $\cos g = \cos h$ и $\sin g = \sin h$;

684. Найдите значение выражения:

а) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$, учитывая, что $\mathrm{tg}\, a = 7$;

б) $\mathrm{tg}(r+s)$ и $\mathrm{tg}(r-s)$, учитывая, что $\mathrm{tg}\, r = 1{,}2$, $\mathrm{tg}\, s = 0{,}7$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$, учитывая, что $\sin\varphi = \frac{3}{4}$ и угол φ оканчивается во второй четверти.

685. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{13\pi}{12}$; д) $\sin\frac{17\pi}{12}$; и) $\sin\frac{19\pi}{12}$; н) $\sin\frac{23\pi}{12}$;

б) $\cos\frac{13\pi}{12}$; е) $\cos\frac{17\pi}{12}$; к) $\cos\frac{19\pi}{12}$; о) $\cos\frac{23\pi}{12}$;

в) $\mathrm{tg}\frac{13\pi}{12}$; ж) $\mathrm{tg}\frac{17\pi}{12}$; л) $\mathrm{tg}\frac{19\pi}{12}$; п) $\mathrm{tg}\frac{23\pi}{12}$;

г) $\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{12}$; з) $\mathrm{ctg}\frac{17\pi}{12}$; м) $\mathrm{ctg}\frac{19\pi}{12}$; р) $\mathrm{ctg}\frac{23\pi}{12}$.

686. Докажите тождество:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t$; д) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$;

б) $\sin(\pi+t)=-\sin t$; е) $\sin(\pi-t)=\sin t$;

в) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=-\cos t$; ж) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=-\cos t$;

г) $\sin(2\pi+t)=\sin t$; з) $\sin(2\pi-t)=-\sin t$.

687. Докажите тождество:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t$; д) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$;

б) $\cos(\pi+t)=-\cos t$; е) $\cos(\pi-t)=-\cos t$;

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=\sin t$; ж) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=-\sin t$;

г) $\cos(2\pi+t)=\cos t$; з) $\cos(2\pi-t)=\cos t$.

688. Докажите тождество:

а) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\mathrm{ctg}\, t$; д) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\mathrm{ctg}\, t$;

б) $\mathrm{tg}(\pi+t)=\mathrm{tg}\, t$; е) $\mathrm{tg}(\pi-t)=-\mathrm{tg}\, t$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=-\mathrm{ctg}\, t$; ж) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\mathrm{ctg}\, t$;

г) $\mathrm{tg}(2\pi+t)=\mathrm{tg}\, t$; з) $\mathrm{tg}(2\pi-t)=-\mathrm{tg}\, t$.

689. Докажите тождество:

а) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\mathrm{tg}\, t$; д) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\mathrm{tg}\, t$;

б) $\mathrm{ctg}(\pi+t)=\mathrm{ctg}\, t$; е) $\mathrm{ctg}(\pi-t)=-\mathrm{ctg}\, t$;

в) $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=-\mathrm{tg}\, t$; ж) $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\mathrm{tg}\, t$;

г) $\mathrm{ctg}(2\pi+t)=\mathrm{ctg}\, t$; з) $\mathrm{ctg}(2\pi-t)=-\mathrm{ctg}\, t$.

690. Упростите выражение:

а) $\cos(x+y)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+y\right)$;

б) $\cos(r-s)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-r\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)$;

в) $\sin(u+v)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-u\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+v\right)$;

г) $\sin(i-j)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+j\right)$.

691. Упростите выражение:

а) $\mathrm{tg}(k+l)(\mathrm{tg}\, k\ \mathrm{tg}\, l-1)$; в) $\mathrm{ctg}(m+n)(\mathrm{tg}\, m+\mathrm{tg}\, n)$;

б) $\mathrm{tg}(a-c)(\mathrm{tg}\, a\ \mathrm{tg}\, c+1)$; г) $\mathrm{ctg}(b+d)(\mathrm{tg}\, b-\mathrm{tg}\, d)$.

692. Упростите выражение:

а) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$; д) $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$;

в) $\dfrac{\sin(u+v)-\sin(u-v)}{\sin(u+v)+\sin(u-v)}$; ж) $\dfrac{\cos(u+v)-\cos(u-v)}{\cos(u+v)+\cos(u-v)}$;

г) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)}$; з) $\dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\varphi\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{3}-\varphi\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\varphi\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{3}+\varphi\right)}$.

693. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=\frac{1+\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t}$;

б) $\operatorname{tg} x+2 \operatorname{ctg} 2x=\operatorname{ctg} x$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}=1$;

г) $\operatorname{tg} x+2 \operatorname{tg} 2x+4 \operatorname{tg} 4x+8 \operatorname{ctg} 8x=\operatorname{ctg} x$.

---

694. Около квадрата $ABCD$ описана окружность, на меньшей из двух дуг с концами A и B отмечена точка M. Докажите, что лучи MC и MD делят угол AMB на три доли.

695. Точки A, B, C, D разделяют окружность на дуги в отношении $AB : BC : CD : DA = 1 : 4 : 7 : 3$ (рис. 328). Найдите:

а) углы четырехугольника;
б) угол между прямыми AB и CD;
в) угол между прямыми AC и BD.

696. Отрезки AB и CD пересекаются в точке Q, причем $AQ \cdot QB = CQ \cdot QD$. Докажите, что точки A, B, C, D принадлежат одной окружности.

697. Три окружности попарно касаются внешним образом в точках A, B, C. Радиусы окружностей относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите наименьший угол треугольника ABC.

698. В сектор с острым центральным углом α вписан квадрат, три вершины которого находятся на радиусах, а четвертая — на дуге (рис. 329). Найдите отношение площадей сектора и квадрата.

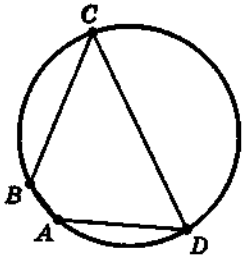


Рис. 328

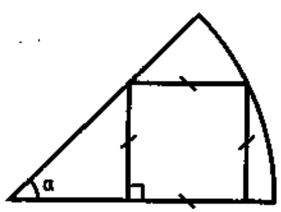


Рис. 329

699. Есть две концентричные окружности. В одной из них проведен диаметр AB, а на второй выбрана точка C. Докажите, что величина AC^2+BC^2 не зависит от того, в какой окружности проведен диаметр и как выбрана точка на второй.

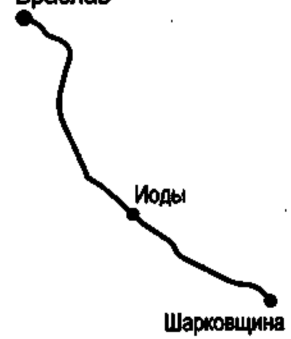


Рис. 330

700. Автомобиль ехал сначала со скоростью 85 км/ч, а затем уменьшил ее и с меньшей скоростью проехал 140 км. Найдите меньшую скорость автомобиля, учитывая, что время движения с этой скоростью было в 2 раза меньше времени движения с большей скоростью, а средняя скорость на всем пути составила 80 км/ч.

701. Доехав за 1,5 ч из Шарковщины до Иодов, велосипедист снизил скорость на 3,5 км/ч и с меньшей скоростью ехал до Браслава еще 2 ч (рис. 330). Найдите расстояния от Иодов до Шарковщины и Браслава, учитывая, что средняя скорость на всем пути составила 14 км/ч.

702. Точка M разбивает отрезок AB на части длиной 9 см и 15 см, на которых построены параллелограммы $AMCD$ и $BMEF$. Их высоты, проведенные из точек D и F, отличаются на 8 см. Найдите возможные значения площади параллелограмма $AMCD$, учитывая, что вместе они дают площадь параллелограмма с основанием AB и высотой 18 см.

* * *

703. Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого цифры в сумме дают:

а) 2010; б) 2011?

704. Найдите четырехугольник с наименьшим периметром, у которого диагонали равны m и n, а угол между ними — φ.

705. Определите, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x+y^2=z^3, \\ x^2+y^3=z^4, \\ x^3+y^4=z^5. \end{cases}$$

7 — 2149

15. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

При работе с введенными в предыдущем параграфе тригонометрическими функциями удобно использовать их геометрические представления, связанные с единичной окружностью, центр которой находится в начале координат (рис. 331). Ее называют **тригонометрической окружностью**.

В параграфе 12 описано, как числу t поставить в соответствие точку M_t единичной окружности. Она получается поворотом точки M_0 на t радиан. Косинус и синус числа t — проекции точки M_t на ось абсцисс (рис. 332) и ось ординат соответственно (рис. 333). Поэтому ось абсцисс называют **осью косинусов**, а ось ординат — **осью синусов** для тригонометрической окружности.

Координатную прямую, полученную параллельным переносом оси ординат на одну единицу вправо (рис. 334), называют **осью тангенсов**, так как проекция на нее точки M_t из начала координат O дает значение тангенса числа t. Действительно, из подобия прямоугольных треугольников OAM_t и OM_0T имеем: $\frac{M_0T}{OM_0} = \frac{AM_t}{OA}$, или $M_0T = \operatorname{tg} t$, с учетом того, что $OM_0 = 1$, $OA = \cos t$ и $AM_t = \sin t$.

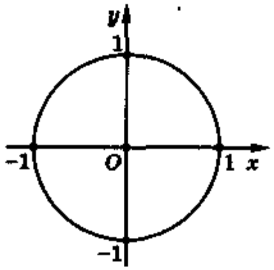


Рис. 331

Также получаем, что если перенести ось абсцисс параллельно на одну единицу вверх (рис. 335), то из подобия прямоугольных треугольников OBM_t и ON_0K следует равенство $N_0K = BM_t : OB = \operatorname{ctg} t$. Поэтому координатную прямую N_0K называют **осью котангенсов**.

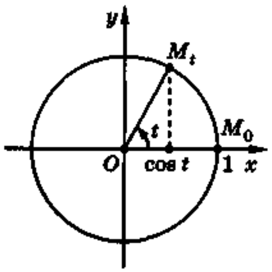


Рис. 332

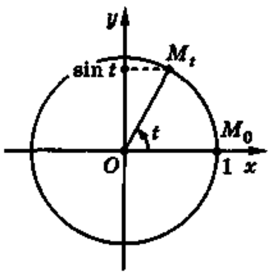


Рис. 333

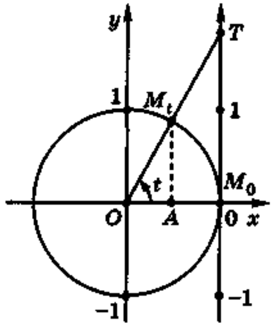


Рис. 334

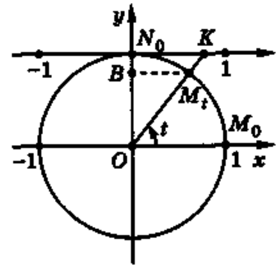


Рис. 335

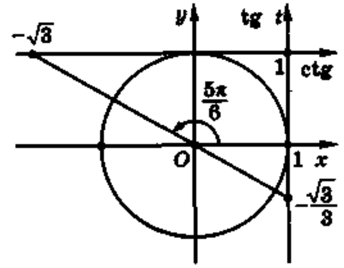


Рис. 336

Из рисунка 336 видно, что $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$ — отрицательное число и его модуль больше единицы, число $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$ — также отрицательное, а его модуль меньше единицы.

Проектирование вдоль оси ординат, как видно из рисунка 337, устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками отрезка $[-1; 1]$ оси косинусов и числами из промежутка $[0; \pi]$. При этом число, соответствующее числу a оси косинусов, называют арккосинусом числа a и обозначают $\arccos a$.

Арккосинусом числа a называется такое число из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Таким образом, по определению

$$t = \arccos a \equiv 0 \leqslant t \leqslant \pi \text{ и } \cos t = a.$$

Из этого определения следует, что

$$\text{если } a \in [-1; 1], \text{ то } \cos(\arccos a) = a,$$
$$\text{а если } t \in [0; \pi], \text{ то } \arccos(\cos t) = t.$$

Как видно из рисунка 338, проектирование вдоль оси абсцисс устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками отрезка $[-1; 1]$ оси синусов и числами из промежутка

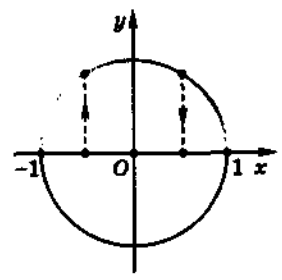


Рис. 337

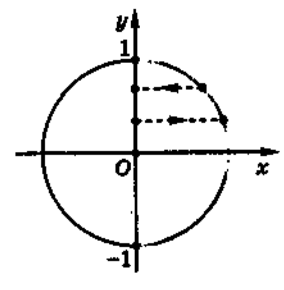


Рис. 338

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При этом число, соответствующее числу a оси синусов, называют арксинусом числа a и обозначают $\arcsin a$.

Арксинусом числа a называется такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Таким образом, по определению

$$t = \arcsin a \equiv -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ и } \sin t = a.$$

Из этого определения следует, что

$$\text{если } a \in [-1; 1], \text{ то } \sin(\arcsin a) = a,$$
$$\text{а если } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то } \arcsin(\sin t) = t.$$

Рисунок 339 показывает, что проектирование с центром O устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками оси тангенсов и числами из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. При этом число, соответствующее числу a оси тангенсов, называют арктангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arctg} a$.

Арктангенсом числа a называется такое число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Таким образом, по определению

$$t = \operatorname{arctg} a \equiv -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ и } \operatorname{tg} t = a.$$

Из этого определения следует, что

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a,$$
$$\text{а если } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \text{ то } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t.$$

Проектирование с центром O устанавливает, как видно из рисунка 340, взаимно однозначное соответствие между точками оси котангенсов и числами из промежутка $(0; \pi)$. При этом число, соответствующее числу a оси котангенсов, называют арккотангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arcctg} a$.

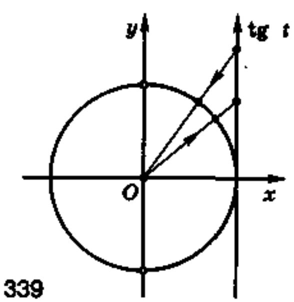


Рис. 339

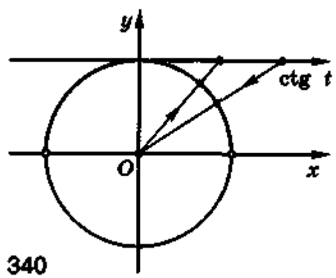


Рис. 340

Арккотангенсом числа a называется такое число из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

Таким образом, по определению

$$t = \operatorname{arcctg} a \equiv 0 < t < \pi \text{ и } \operatorname{ctg} t = a.$$

Из этого определения следует, что

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a,$$
$$\text{а если } t \in (0; \pi), \text{ то } \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t.$$

Пример 1. Найдем значения выражений $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$, где $t = \arcsin\frac{1}{3}$.

Используя определение арксинуса, получаем, что число t удовлетворяет условиям $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin t = \frac{1}{3}$. Тогда $\cos t = +\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, поскольку $\cos t > 0$. Далее находим, что $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = 2\sqrt{2}$.

Пример 2. Найдем значение выражения $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$.

Используя формулы приведения, получаем: $\sin\frac{7\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$. А поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{2\pi}{5} \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}$.

Пример 3. Сравним числа $\arccos\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$.

Поскольку числа $\arccos\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ оба принадлежат промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 341), на котором большему значению аргумента соответствует меньшее значение косинуса и наоборот, $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; и $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, то $\arccos\frac{1}{3} > \frac{\pi}{3}$.

Теорема 7. ***Для любого действительного числа a из промежутка $[-1; 1]$ истинны равенства:***

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a,$$
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a,$$
$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

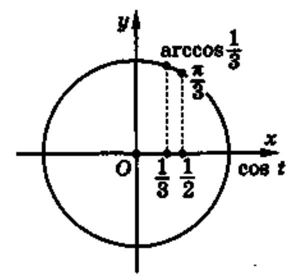


Рис. 341

Доказательство. Пусть число a принадлежит промежутку $[-1; 1]$. Тогда выражения $\arcsin a$, $\arccos a$, $\arcsin(-a)$ и $\arccos(-a)$ имеют значения, причем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$.

После умножения каждой части первого неравенства на число -1 получаем, что

$$\frac{\pi}{2} \geqslant -\arcsin a \geqslant -\frac{\pi}{2}, \text{ или } -\frac{\pi}{2} \leqslant -\arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

А поскольку

$$\sin(-\arcsin a) = -\sin(\arcsin a) = -a,$$

то, по определению арксинуса, $\arcsin(-a) = -\arcsin a$. Первое тождество доказано.

Для доказательства второго тождества умножим на число -1 все части неравенства $0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$ и прибавим к каждой число π. Получаем:

$$0 \geqslant -\arccos a \geqslant -\pi, \qquad (1)$$
$$\pi \geqslant \pi - \arccos a \geqslant 0, \text{ или}$$
$$0 \leqslant \pi - \arccos a \leqslant \pi.$$

А поскольку

$$\cos(\pi - \arccos a) = -\cos(\arccos a) = -a,$$

то, по определению арккосинуса, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$. Второе тождество доказано.

Чтобы доказать третье тождество, к каждой части неравенства (1) прибавим число $\frac{\pi}{2}$. Получаем, что $\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\pi}{2} - \arccos a \geqslant -\frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\frac{\pi}{2} - \arccos a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Поскольку

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos a\right) = \cos(\arccos a) = a,$$

то, по определению арксинуса, получаем, что

$$\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a, \text{ или } \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 8. ***Для любого действительного числа a истинны равенства:***

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a,$$
$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a,$$
$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Для каждого действительного числа a выражения $\arcsin a$, $\arccos a$, $\arcsin(-a)$ и $\arccos(-a)$ имеют значения, причем $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{arcctg} a < \pi$.

После умножения каждой части первого неравенства на число -1 получаем, что

$$\frac{\pi}{2} > -\operatorname{arctg} a > -\frac{\pi}{2}, \text{ или } -\frac{\pi}{2} < -\operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}.$$

А поскольку

$$\operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} a) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = -a,$$

то, по определению арктангенса, $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$. Первое тождество доказано.

Для доказательства второго тождества умножим на число -1 все части неравенства $0 \leqslant \operatorname{arcctg} a \leqslant \pi$ и прибавим к каждой число π. Получаем:

$$0 > -\operatorname{arcctg} a > -\pi, \qquad (2)$$
$$\pi > \pi - \operatorname{arcctg} a > 0, \text{ или}$$
$$0 < \pi - \operatorname{arcctg} a < \pi.$$

А поскольку

$$\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} a) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = -a,$$

то, по определению арккотангенса, $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$. Второе тождество доказано.

Чтобы доказать третье тождество, к каждой части неравенства (2) прибавим число $\frac{\pi}{2}$. Получаем, что

$$\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} a > -\frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} a\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a,$$

то, по определению арктангенса, получаем, что $\operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} a$, или $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$.

?
1. Что называют тригонометрической окружностью?
2. Объясните названия *ось косинусов* и *ось синусов*.
3. Как расположены около тригонометрической окружности оси тангенсов и котангенсов?
4. Что называется арккосинусом числа a; арксинусом числа a; арктангенсом числа a; арккотангенсом числа a?
5. Какая имеется зависимость между числами $\arcsin a$ и $\arcsin(-a)$; $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arctg}(-a)$?
6. Какая имеется зависимость между числами $\arccos a$ и $\arccos(-a)$; $\operatorname{arcctg} a$ и $\operatorname{arcctg}(-a)$?
7. Какая имеется зависимость между числами $\arcsin a$ и $\arccos a$; $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arcctg} a$?

706. Найдите значение t из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, удовлетворяющее условию:

а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin t = \frac{1}{2}$; д) $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin t = -\frac{1}{2}$; е) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

707. Определите, в какой четверти находится точка тригонометрической окружности, соответствующая числу:

а) $\arcsin 0{,}6$; в) $\arcsin(-0{,}8)$;
б) $\arcsin 0{,}9$; г) $\arcsin(-0{,}1)$.

708. Вычислите:

а) $\arcsin 1$; г) $\arcsin \frac{1}{2}$; ж) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $\arcsin(-1)$; д) $\arcsin(-0{,}5)$; з) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\arcsin 0$; е) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

709. С помощью микрокалькулятора или таблиц найдите:

а) $\arcsin 0{,}6691$; е) $\arcsin(-0{,}4848)$;
б) $\arcsin 0{,}9101$; ж) $\arcsin(-0{,}9336)$;
в) $\arcsin 0{,}9816$; з) $\arcsin(-0{,}9877)$;
г) $\arcsin 0{,}9994$; и) $\arcsin(-0{,}8660)$;
д) $\arcsin(-0{,}3090)$; к) $\arcsin(-0{,}0125)$.

710. Найдите значение выражения:

а) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{4}\right)$; г) $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{4}\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$; д) $\arcsin(\sin x)$, если $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$;

в) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{7}\right)$; е) $\arcsin(\sin x)$, если $\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

711. Найдите значение выражения:

а) $\arcsin 0 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin 1$;

б) $\arcsin 0 + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin(-1)$;

в) $6 \arcsin(-1) - 12 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

712. Определите, в какой четверти находится точка тригонометрической окружности, соответствующая числу:

а) $\arccos 0{,}7$; в) $\arccos(-0{,}3)$;
б) $\arccos 0{,}1$; г) $\arccos(-0{,}001)$.

713. Определите, истинно ли утверждение:

а) из того, что $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следует, что $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

б) из того, что $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, следует, что $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) из того, что $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, следует, что $\arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2}$;

г) из того, что $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, следует, что $\sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

714. Вычислите:

а) $\sin(\arcsin 0{,}6)$; в) $\cos\left(\arcsin\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right)$;

б) $\sin(\arcsin(-0{,}8))$; г) $\cos\left(\arcsin \frac{\pi}{4}\right)$.

715. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс числа:

а) $\arcsin 0{,}4$; б) $\arcsin(-0{,}8)$.

716. Докажите, что истинно равенство:

а) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$; б) $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$.

717. Вычислите:

а) $\arccos 0$; г) $\arccos \frac{1}{2}$; ж) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\arccos 1$; д) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; з) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arccos(-1)$; е) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

718. С помощью микрокалькулятора или таблиц найдите значение выражения:

а) $\arccos 0{,}4278$; д) $\arccos(-0{,}3298)$;
б) $\arccos 0{,}2983$; е) $\arccos(-0{,}7878)$;
в) $\arccos 0{,}9987$; ж) $\arccos(-0{,}897)$;
г) $\arccos 0{,}0239$; з) $\arccos(-0{,}5679)$.

719. Определите, могут ли $\arccos a$ и $\arcsin a$ быть равными:

а) $\sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{22}}{3}$; д) $\frac{\pi}{2}$; ж) $-1{,}1$;

б) $\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{23}}{3}$; е) $\frac{4\pi}{3}$; з) -2.

720. Найдите значение выражения:

а) $\cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$; в) $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{5}\right)$;

б) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{7}\right)\right)$; г) $\arccos\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$;

д) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)\right)$; е) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)$.

721. Докажите тождество:

а) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; б) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

722. Начертите в тетради таблицу и заполните ее:

a	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$									
$\arccos a$									

723. Решите уравнение:

а) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin y = \frac{5\pi}{6}$; в) $\arcos z = \frac{5\pi}{6}$.

724. Определите, при каких значениях переменной a истинно равенство:

а) $\arcsin\sqrt{1-a^2} = \arcos a$;
б) $\arccos\sqrt{1-a^2} = \arcsin a$;
в) $\arcsin(\sin a) = a$;
г) $\sin(\arcsin a) = a$;
д) $\arccos(\cos a) = a$;
е) $\cos(\arccos a) = a$.

725. Найдите значение выражения:

а) $\arccos 0 + \arccos(-1) + \arccos 1$;

б) $\arccos 0 + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arccos(-1) - \arccos 1 - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $5\arccos(-1) - 12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

726. Найдите значение выражения:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$;
б) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-5))$;
г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-5))$.

727. Определите, истинно ли утверждение:

а) из того, что $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, следует, что $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

б) из того, что $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, следует, что $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

в) из того, что $\cos 3\pi = -1$, следует, что $\arccos(-1) = 3\pi$;

г) из того, что $\arccos(-1) = \pi$, следует, что $\cos\pi = -1$.

728. Найдите значение выражения:

а) $\cos(\arccos 0{,}5)$;
б) $\cos(\arccos 0{,}2)$;
в) $\sin\left(\arccos\left(\sqrt{2}-2\right)\right)$;
г) $\sin\left(\arccos\left(3-\sqrt{2}\right)\right)$.

729. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс числа:

а) $\arccos 0{,}5$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos(-0{,}5)$.

730. Докажите, что истинно равенство:

а) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$;
б) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{7}\right) = \frac{6\pi}{7}$;
в) $\arccos\left(\cos\frac{15\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$;
г) $\arccos(\cos 6) = 2\pi - 6$.

731. Вычислите:

а) $\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)$; б) $\arccos(\cos 12)$; в) $\arccos(\cos -12)$.

732. Определите, могут ли значения выражений $\arccos a$ и $\arcsin a$ принимать значения:

а) одного знака; б) разных знаков.

733. Начертите в тетради таблицу и заполните ее:

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$							
$\operatorname{arcctg} a$							

734. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg} 1$;

б) $\operatorname{arcctg} 0 + \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg} 1$;

в) $\operatorname{arcctg} 0 + \operatorname{arcctg}(-1) - \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

г) $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arctg} 0$.

735. Определите, какие значения могут принимать числа a и b, учитывая, что:

а) $b = \arcsin a$;
б) $b = \arccos a$;
в) $b = \operatorname{arctg} a$;
г) $b = \operatorname{arcctg} a$.

736. Определите, могут ли значения выражений $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arcctg} a$ принимать значения:

а) одного знака; б) разных знаков.

737. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс числа:

а) $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; в) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)$;
б) $\operatorname{arctg}(-0{,}75)$; г) $\operatorname{arcctg} 0{,}75$.

738. Докажите, что истинно равенство:

а) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}$; в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 7)=7-2\pi$;

б) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right)=\frac{4\pi}{7}$; г) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-7))=-7+2\pi$.

739. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 2)$; в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-10))$;
б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-2))$; г) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-10))$.

740. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\arcsin 0+\arccos 0+\operatorname{arctg} 0$;

б) $\operatorname{arctg} 0$; е) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; ж) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

г) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; з) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

741. Вычислите:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arctg} 1$;

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

742. Найдите значение выражения:

а) $\cos^2\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+\sin^2\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{33\pi}{7}\right)\right)-\arccos\left(\cos\frac{46\pi}{7}\right)-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{13\pi}{8}\right)+$
$+\operatorname{arcctg}\left(-\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{8}\right)$.

743. Найдите значение выражения:

а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arcctg}(-1)+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arccos(-1)$;

б) $\arcsin\left(\sin\frac{33\pi}{7}\right)+\arccos\left(\cos\frac{46\pi}{7}\right)$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{13\pi}{8}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{19\pi}{8}\right)\right)$.

744. Вычислите:

а) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; д) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

б) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right)$; г) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; е) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right)$.

745. Упростите выражения:

а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{17\pi}{5}\right)$; в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 8)$; д) $\arcsin\left(\cos\frac{31\pi}{5}\right)$;

б) $\arccos(\cos 11)$; г) $\arccos(\sin 10)$; е) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{13\pi}{5}\right)\right)$.

746. Решите уравнение:

а) $\arcsin a=\frac{\pi}{3}$; в) $\operatorname{arctg} a=-\frac{\pi}{6}$;

б) $\arccos a=\frac{2\pi}{3}$; г) $\arcsin(a-1)=-\frac{\pi}{4}$.

747. Найдите значение выражения:

а) $\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$; г) $\sin\left(\arcsin 0{,}6+\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$;

б) $\cos\left(\arccos\frac{15}{17}-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$; д) $\sin\left(\arccos\frac{5}{13}-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right)$;

в) $\operatorname{tg}(\arcsin 0{,}6-\operatorname{arctg} 2{,}4)$; е) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arcctg}\frac{5}{12}\right)$.

748. Вычислите:

а) $\sin\left(3\operatorname{arcctg}\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)$;

б) $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7}{3}\operatorname{arctg} 1+\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

749. Вычислите:

а) $\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\operatorname{arcctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $\arccos\left(-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $\arcsin\left(-\sin\frac{7\pi}{3}\right)$.

750. Определите, какой четверти тригонометрической окружности принадлежит число:

а) $\operatorname{arctg} 5$; в) $\operatorname{arcctg} 3$; д) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}(-4)$;

б) $\operatorname{arctg}(-7)$; г) $\operatorname{arcctg}(-2)$; е) $\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

751. Докажите, что:

а) если тангенсы трех острых углов равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{8}$, то сумма этих углов равна $\frac{\pi}{4}$;

б) если $a = \operatorname{arcctg}\frac{3}{4}$ и $b = \operatorname{arcctg}\frac{1}{7}$, то $a + b = \frac{3\pi}{4}$.

752. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{7}{25}$ и $\frac{4}{5}$. Докажите, что косинус внешнего, несмежного с данными, угла этого треугольника равен 0,352.

753. Определите, при каких значениях переменной истинно равенство:

а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{a} = \operatorname{arcctg} a$; в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.

б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a) = a$;

754. Докажите, что истинно равенство:

а) $\operatorname{arcctg}\frac{12}{5} - \arcsin\left(-\frac{8}{17}\right) = \operatorname{arcctg}\frac{140}{171}$;

б) $\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{5}{13} = \pi - \arccos\frac{16}{65}$;

в) $\arccos\frac{4}{5} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right) = \operatorname{arctg}\frac{16}{63}$;

г) $\arccos\frac{15}{17} - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = -\arcsin\frac{13}{85}$.

755. Упростите выражение:

а) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3} - \operatorname{arctg}(-2{,}4)$; г) $\operatorname{arcctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{15}{8}$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{5}{12} - \operatorname{arcctg}\frac{4}{3}$; д) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$;

в) $\operatorname{arcctg}\frac{8}{15} - \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$; е) $\operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 3$.

756. Упростите выражение:

а) $\arcsin\frac{12}{13} + \arccos\frac{8}{17}$; г) $\arcsin\frac{12}{13} + \operatorname{arcctg}\frac{5}{12}$;

б) $\arccos\frac{7}{25} + \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; д) $\arccos\frac{15}{17} + \operatorname{arcctg}\frac{4}{3}$;

в) $\operatorname{arctg} 2{,}4 - \arccos\frac{3}{5}$; е) $\operatorname{arcctg} 0{,}75 + \arcsin\left(-\frac{15}{17}\right)$.

757. Определите, может ли выражаться отрицательным числом:

а) $\cos(\arcsin b)$; в) $\sin(\arccos b)$; д) $\operatorname{ctg}(\arcsin b)$;

б) $\cos(\operatorname{arctg} b)$; г) $\sin(\operatorname{arctg} b)$; е) $\operatorname{tg}(\arccos b)$?

758. Упростите выражение:

а) $\frac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}3$; в) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3$;

б) $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{11}$; г) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} h$ $(h > 0)$.

759. Докажите, что при любом значении переменной a из промежутка $[-1; 1]$ истинна формула:

а) $\arccos(2a^2 - 1) = 2\arccos|a|$;

б) $\arccos(2a^2 - 1) = 2\arccos a$.

760. Найдите значение выражения:

а) $2\arcsin\frac{1}{6} - \arccos\frac{17}{18}$;

б) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arcctg}\frac{2}{3}$;

в) $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13} + \arcsin\frac{16}{65}$;

г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{9}$;

д) $\arccos\frac{3}{5} - \arccos\frac{15}{17} + \arccos\frac{36}{85}$;

е) $\operatorname{arctg}\frac{1}{9} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{4}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

761. Докажите, что равенство:

а) $\operatorname{arctg} a = \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$ истинно при любом значении переменной a;

б) $2\arcsin\sqrt{\frac{1-a}{2}} = \arccos a$ истинно, если $|a| \leqslant 1$;

в) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arcctg}\left(\frac{1-ab}{a+b}\right)$ истинно, если $a > 0$, $b > 0$;

г) $\arccos a - \arccos b = \arcsin\left(b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2}\right)$ истинно, если $0 \leqslant a \leqslant 1$ и $0 \leqslant b \leqslant 1$;

д) $\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \operatorname{arctg}|a|$ истинно при любом значении переменной a;

е) $\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \arcsin a$ истинно, если $|a| < 1$.

762. Вычислите:

а) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{8}{15} - \arcsin\frac{8}{17}\right)$;

б) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \arccos\frac{3}{5}\right)$;

в) $\sin\left(2\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} - \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$;

г) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \arcsin\frac{3}{5}\right)$.

763. Упростите выражение:

а) $\cos(\arccos n + \arccos m)$;

б) $\sin(\arccos b + \arcsin c)$;

в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} e)$;

г) $\operatorname{tg}(\arcsin k + \arcsin l)$;

д) $\sin(2\arcsin p)$;

е) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} j)$;

ж) $\cos(2\operatorname{arctg} h)$;

з) $\sin(2\operatorname{arcctg} g)$;

и) $\cos(2\operatorname{arcctg} f)$;

к) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos d\right)$;

л) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} s\right)$;

м) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} t\right)$.

764. Определите, истинно ли равенство:

а) $\arccos\frac{7}{8} = 2\arcsin\frac{1}{4}$;

б) $\arccos\frac{17}{18} = 2\arcsin\frac{1}{6}$;

в) $\arccos\frac{7}{9} = 2\arcsin\frac{1}{6}$;

г) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3} = \frac{5\pi}{4}$;

д) $\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

е) $\arcsin\frac{7}{25} + \frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25} = \arccos\frac{3}{5}$.

765. Определите, истинно ли равенство:

а) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{9} + \operatorname{arcctg}\frac{4}{5} = \frac{3\pi}{4}$;

г) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arctg}\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$;

д) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{9} = \frac{\pi}{4}$;

е) $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

766. Докажите равенство:

а) $\operatorname{arctg} k = \arcsin\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$;

б) $2\arccos\sqrt{\frac{1+z}{2}} = \arccos z$;

в) $\frac{1}{2}\arccos(2s^2 - 1) = \arccos s$, если $s \geqslant 0$.

767. Докажите тождество:

а) $\arcsin p = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-p^2}, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ -\arccos\sqrt{1-p^2}, & \text{если } -1 \leqslant p \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\arcsin n = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}, & \text{если } 0 < n \leqslant 1, \\ \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-n^2}}{n} - \pi, & \text{если } -1 \leqslant n < 0. \end{cases}$

768. Докажите тождество:

а) $\arccos l = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-l^2}, & \text{если } 0 \leqslant l \leqslant 1, \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-l^2}, & \text{если } -1 \leqslant l \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\arccos j = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-j^2}}{j}, & \text{если } 0 < j \leqslant 1, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-j^2}}{j}, & \text{если } -1 \leqslant j < 0. \end{cases}$

769. Докажите тождество:

а) $\operatorname{arctg} k = \begin{cases} \arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, & \text{если } k > 0, \\ -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, & \text{если } k \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\operatorname{arctg} m = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\frac{1}{m}, & \text{если } m > 0, \\ \operatorname{arcctg}\frac{1}{m} - \pi, & \text{если } m < 0. \end{cases}$

770. Докажите тождество:

а) $\operatorname{arcctg} b = \begin{cases} \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, & \text{если } b \geqslant 0, \\ \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, & \text{если } b < 0; \end{cases}$

б) $\operatorname{arcctg} c = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{c}, & \text{если } c > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{c}, & \text{если } c < 0. \end{cases}$

771. Может ли синус быть равным:

а) $\frac{\sqrt{10}}{\pi}$; б) $n+\frac{1}{n}$; в) $\frac{q}{\sqrt{q^2+p^2}}$; г) $\frac{2\sqrt{cd}}{c+d}$?

772. Найдите катеты прямоугольного треугольника с площадью S, учитывая, что:

а) радиус описанной около него окружности равен R;
б) радиус вписанной в него окружности равен r;
в) высота, проведенная к гипотенузе, равна h;
г) медиана, проведенная к катету, равна m;
д) биссектриса, проведенная к гипотенузе, равна l.

773. Диагонали ромба относятся как $3:4$. Во сколько раз площадь ромба больше площади вписанного в него круга?

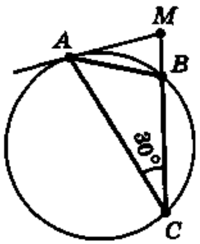


Рис. 342

774. Из точки M к окружности проведены касательная MA и секущая BC (рис. 342). Найдите площадь треугольника MAB, учитывая, что $MB=8$, $BC=16$ и $\angle ACB=30°$.

775. Автомобиль из Бреста до Ружан ехал с одной скоростью, а затем снизил ее и на путь до Гродно (рис. 343) затратил на 30 мин больше, чем на первую часть пути. Найдите скорости автомобиля на каждом участке пути, учитывая, что средняя скорость на всем пути оказалась равной 82 км/ч.

Рис. 343

776. Есть два конуса, площади боковых поверхностей которых равны 608π см^2 и 475π см^2, причем образующая первого конуса на 19 см больше. Радиус основания третьего конуса, боковая поверхность которого равна суммарной боковой поверхности первого и второго конусов, а образующая — суммарной длине образующих этих конусов, имеет длину 19 см. Найдите радиусы оснований конусов, учитывая, что боковая поверхность S конуса, радиус r его основания и образующая l связаны формулой $S=\pi rl$ (рис. 344).

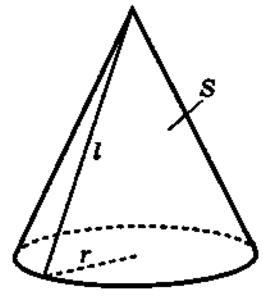


Рис. 344

* * *

777. а) Докажите, что сумма квадратов любых десяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.

б) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых есть точный квадрат.

778. Медианы AD и BF треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите периметр треугольника, учитывая, что в четырехугольник $CDMF$ можно вписать окружность, $AB=6$ и $MD=\sqrt{3}$.

779. Определите угол между диагоналями четырехугольника, последовательные стороны которого равны 8, 12, 9, 1.

16. Применения формул сложения

Доказанные в предыдущем параграфе формулы приведения следуют из формул сложения. Эти формулы имеют и другие важные следствия.

Теорема 9. ***Формулы***

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t,$$
$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t,$$
$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t}$$

являются тождествами.

Доказательство. Используя соответствующие формулы сложения, получим:

$$\sin 2t = \sin(t+t) = \sin t\cos t + \cos t\sin t = 2\sin t\cos t;$$
$$\cos 2t = \cos(t+t) = \cos t\cos t - \sin t\sin t = \cos^2 t - \sin^2 t;$$
$$\operatorname{tg} 2t = \operatorname{tg}(t+t) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t\operatorname{tg} t} = \frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t}.$$

Формулы, установленные теоремой 9, называют *формулами двойного аргумента*. Эти формулы позволяют синус, косинус, тангенс любого аргумента выразить через тригонометрические выражения вдвое меньшего аргумента. Например,

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$\sin 3y = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2},\quad \operatorname{tg} 12t = \frac{2\operatorname{tg} 6t}{1-\operatorname{tg}^2 6t}.$$

Пример 1. Упростите выражение $\operatorname{tg} 3t - \operatorname{ctg} 3t$.

Получим:

$$\operatorname{tg} 3t - \operatorname{ctg} 3t = \frac{\sin 3t}{\cos 3t} - \frac{\cos 3t}{\sin 3t} = \frac{\sin^2 3t - \cos^2 3t}{\sin 3t\cos 3t} =$$

$$= -2\cdot\frac{\cos^2 3t - \sin^2 3t}{2\sin 3t\cos 3t} = -2\cdot\frac{\cos 6t}{\sin 6t} = -2\operatorname{ctg} 6t.$$

Теорема 10. ***Формулы***

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2},\quad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2},$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin 2t}{1+\cos 2t},\quad \operatorname{tg} t = \frac{1-\cos 2t}{\sin 2t}$$

являются тождествами.

Доказательство. Поскольку $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$ и $\cos 2t = = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$, то

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \text{ и } \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}.$$

Для доказательства третьего равенства преобразуем его правую часть:

$$\frac{\sin 2t}{1+\cos 2t} = \frac{2\sin t\cos t}{2\cos^2 t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Так же доказывается четвертое равенство.

Формулы, установленные теоремой 10, позволяют выразить синус, косинус и тангенс любого аргумента через тригонометрические выражения вдвое большего аргумента. Иногда их называют *формулами половинного аргумента*. Первые две из этих формул называют *формулами понижения степени*.

Пример 2. Найдем значение выражения $\sin^4\frac{x}{2} + \cos^4\frac{x}{2}$, учитывая, что $\cos x = \frac{60}{61}$.

Получим:

$$\sin^4\frac{x}{2} + \cos^4\frac{x}{2} = \left(\sin^2\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^2.$$

Теперь учтем, что $\cos x = \frac{60}{61}$:

$$\left(\frac{1-\frac{60}{61}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\frac{60}{61}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\cdot 61}\right)^2 + \left(\frac{121}{2\cdot 61}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+14\,641}{14\,884} = \frac{14\,642}{14\,884} = \frac{7321}{7442}.$$

Теорема 11. ***Формулы***

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2},$$

$$\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2},$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2},$$

$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

являются тождествами.

Доказательство. Обратим внимание на то, что истинны равенства:

$$u = \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2};\quad v = \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}.$$

Учитывая это, получим:

$$\sin u + \sin v = \sin\left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right) + \sin\left(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} + \cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} + \sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} -$$

$$- \cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}.$$

Аналогично доказываются три остальные формулы.

Пример 3. Найдем значение выражения:

а) $\sin 82{,}5^\circ + \sin 37{,}5^\circ$; б) $\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{7\pi}{12}$.

Имеем:

а) $\sin 82{,}5^\circ + \sin 37{,}5^\circ = 2\sin\frac{82{,}5^\circ + 37{,}5^\circ}{2}\cos\frac{82{,}5^\circ - 37{,}5^\circ}{2} =$

$= 2\sin 120^\circ\cos 45^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

б) $\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{7\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}}{2} = -2\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

$= -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$

Пример 4. Докажем истинность равенства $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ = 4$.

Будем последовательно получать:

$$\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ = (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ) - (\operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ) =$$

$$= \frac{\sin(9^\circ+81^\circ)}{\cos 9^\circ\cos 81^\circ} - \frac{\sin(27^\circ+63^\circ)}{\cos 27^\circ\cos 63^\circ} = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ\sin 9^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ\sin 27^\circ} =$$

$$= \frac{2}{2\cos 9^\circ\sin 9^\circ} - \frac{2}{2\cos 27^\circ\sin 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ} =$$

$$= \frac{2(2\cos 36^\circ\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ} = \frac{4\cos 36^\circ\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\cos 36^\circ} = 4.$$

Теорема 12. ***Формулы***

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v)),$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v)),$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u-v) + \sin(u+v))$$

истинны при любых значениях переменных u и v.

Доказательство. Мы знаем, что истинны равенства:

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v;$$
$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v;$$
$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v;$$
$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим:

$$\cos(u-v) - \cos(u+v) = 2\sin u \sin v,$$

или

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v)).$$

Сложив первое и второе равенства, придем к равенству

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v)),$$

а сложив третье и четвертое равенства — к равенству

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u-v) + \sin(u+v)).$$

Пример 5. Упростим выражение $\sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a)$.

Используем такой прием: умножим данное выражение на выражение $\dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$, которое равно единице. Тогда получим:

$$\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\left(\sin x \sin\frac{a}{2} + \sin(x+a)\sin\frac{a}{2} + \sin(x+2a)\sin\frac{a}{2} + \right.$$

$$\left. + \sin(x+3a)\sin\frac{a}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{3a}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{3a}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5a}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5a}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{7a}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\left(\cos\left(x-\frac{a}{2}\right) - \cos\left(x+\frac{7a}{2}\right)\right).$$

Формула $\operatorname{tg} 2t = \dfrac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t}$, доказанная в теореме 9, дает возможность тангенс некоторого аргумента выразить через тангенс вдвое меньшего аргумента. Через тангенс такого аргумента можно выразить также синус и косинус.

▶ **Теорема 13.** ***Формулы***

$$\sin 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}, \quad \cos 2t = \frac{1-\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$$

являются тождествами.

Доказательство. Мы знаем, что истинно равенство

$$\sin 2t = 2\sin t \cos t.$$

Его можно записать в виде

$$\sin 2t = \frac{2\sin t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t},$$

учитывая, что $1 = \cos^2 t + \sin^2 t$.

Теперь разделим числитель и знаменатель дроби в правой части на $\cos^2 t$ и учтем определение тангенса:

$$\sin 2t = \frac{\frac{2\sin t\cos t}{\cos^2 t}}{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}.$$

Аналогично доказывается второе равенство.

Формулы, установленные теоремой 13, позволяют тригонометрическое выражение вида $A\sin x + B\cos x + C\operatorname{tg} x + D$ представить рациональным выражением от $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Их иногда называют *формулами универсальной тригонометрической подстановки.*◀

Пример 6. Найдем значение выражения

$$2\sin^2\left(b+\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos^2 b + \operatorname{tg} b,$$

учитывая, что $\operatorname{tg} b = 7$.

Используя формулы понижения степени из теоремы 10 и формулы универсальной тригонометрической подстановки из теоремы 13, получим:

$$2\sin^2\left(b+\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos^2 b + \operatorname{tg} b =$$

$$= 1 - \cos\left(2b+\frac{\pi}{2}\right) + 1 - \cos 2b + \operatorname{tg} b = 2 + \sin 2b - \cos 2b + \operatorname{tg} b =$$

$$= 2 + \frac{2\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg}^2 b} - \frac{1-\operatorname{tg}^2 b}{1+\operatorname{tg}^2 b} + \operatorname{tg} b.$$

Теперь, учитывая, что $\operatorname{tg} b = 7$, проводим вычисления:

$$2+\frac{2\cdot 7}{1+7^2}-\frac{1-7^2}{1+7^2}+7=9+\frac{14}{50}-\frac{48}{50}=8{,}32.$$

Сориентироваться в формулах, установленных теоремами 9—13, вам поможет схема, приведенная на рисунке 345.

1. Запишите формулы двойного аргумента для синуса, косинуса и тангенса.
2. Запишите формулы, выражающие косинус двойного аргумента через синус вдвое меньшего аргумента; через косинус вдвое меньшего аргумента.
3. Запишите формулы половинного аргумента, выражающие синус, косинус, тангенс данного аргумента через косинус вдвое большего аргумента.
4. Запишите формулы преобразования в произведение суммы и разности синусов.
5. Запишите формулы преобразования в произведение суммы и разности косинусов.
6. Запишите формулы преобразования в сумму произведения синусов; произведения косинусов; произведения синуса и косинуса.
7. Запишите формулы, выражающие синус, косинус и тангенс данного аргумента через тангенс вдвое меньшего аргумента.

780. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin b}{\cos b}+\frac{\cos b}{1+\sin b}$;

б) $(3\sin y+2\cos y)^2+(2\sin y-3\cos y)^2$;

в) $\operatorname{tg}^2 b-\sin^2 b-\operatorname{tg}^2 b\sin^2 b$;

г) $\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}+\sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}}$.

781. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}=2\sin a\cdot\cos a$;

б) $\frac{\operatorname{tg} 4b-\operatorname{tg} 3b}{1+\operatorname{tg} 4b\cdot\operatorname{tg} 3b}=\operatorname{tg} b$;

в) $(1+\operatorname{tg}^2\varphi)(1-\sin^2\varphi)-\sin^2\varphi=\cos^2\varphi$;

г) $\sin^2 a\cdot\sin^2 b+\sin^2 a\cdot\cos^2 b+\cos^2 a=1$.

782. Упростите выражение:

а) $2\cos^2\frac{c}{2}-1$;

б) $\frac{\sin(x+y)-\cos x\sin y}{\cos(x-y)-\sin x\sin y}$;

в) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta$;

г) $\frac{1+\sin 2c}{(\sin c+\cos c)^2}$;

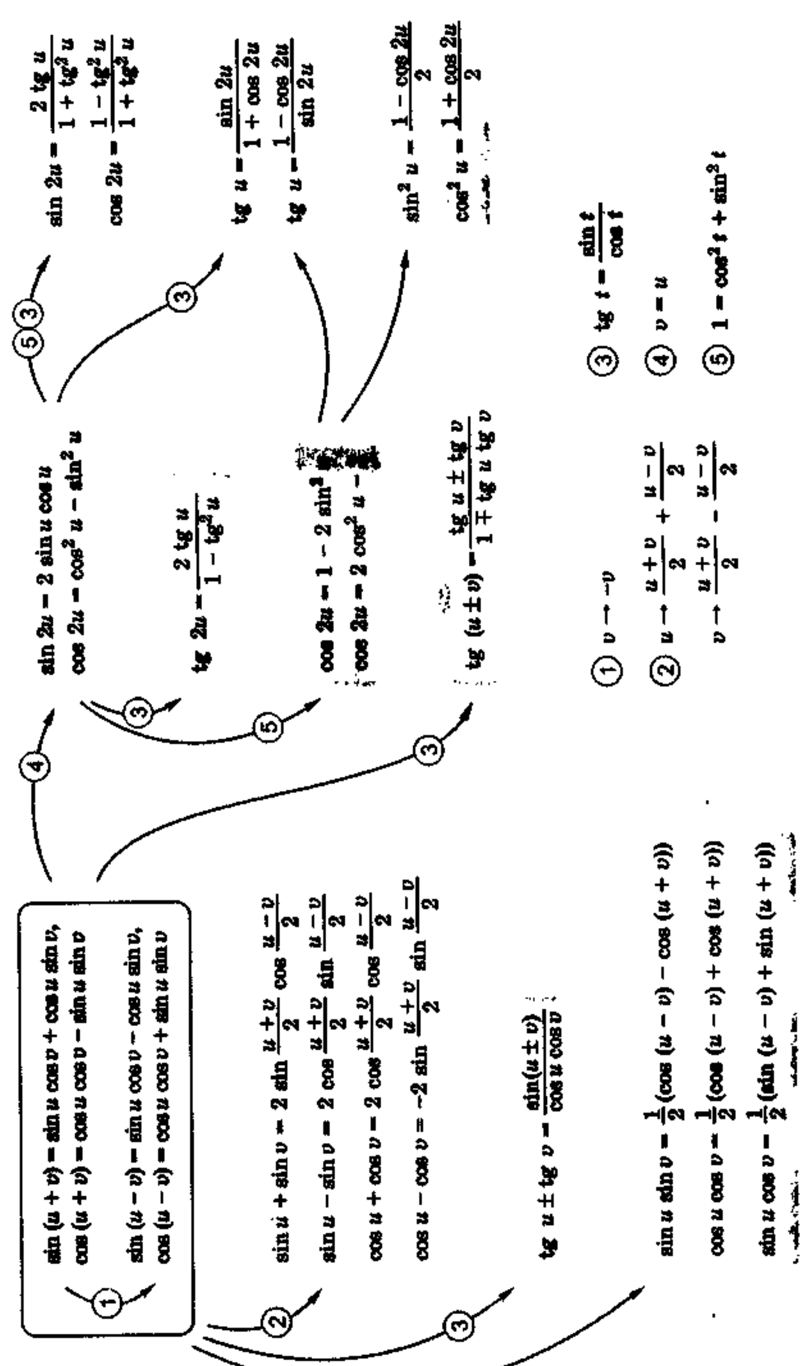


Рис. 345

д) $\frac{1-\cos 2c+\sin 2c}{1+\cos 2c+\sin 2c}$;

е) $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)+\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)$.

783. Докажите тождество:

а) $\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin a+\cos a)$;

б) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+d\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+d\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+d\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+d\right)}=\operatorname{tg} d$;

в) $\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}+\frac{\sin(b-c)}{\cos b\cos c}+\frac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a}=0$.

784. Вычислите:

а) $2\sin 15°\cos 15°$;

б) $2\sin 75°\cos 75°$;

в) $\cos^2 15°-\sin^2 15°$;

г) $(\cos 75°-\sin 75°)^2$;

д) $(\cos 15°+\sin 15°)^2$;

е) $\frac{2\operatorname{tg}15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$.

785. Вычислите:

а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$;

г) $\cos^2 15°-\sin^2 15°$;

д) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;

е) $2\cos^2\frac{\pi}{12}-1$.

786. Упростите выражение:

а) $2\sin 40°\cdot\sin 50°$;

б) $(\sin 10°+\sin 80°)\cdot(\cos 80°-\cos 10°)$;

в) $\cos^4\beta-\sin^4\beta$;

г) $\cos^2\gamma-\sin^2\gamma+2\sin\gamma\cos\gamma$;

д) $1-4\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi$;

е) $\frac{(\cos\beta-\sin\beta)^2}{1-\sin^2 2\beta}$.

787. Докажите тождество:

а) $\sin 2\gamma=(\sin\gamma+\cos\gamma)^2-1$;

б) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$;

в) $\cos^4\gamma-\sin^4\gamma=\cos 2\gamma$;

г) $2\cos^2 x-\cos 2x=1$;

д) $1+\cos 2y=2\cos^2 y$;

е) $1-\cos 2z=2\sin^2 z$.

788. Докажите тождество:

а) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

б) $1-\cos\beta=2\sin^2\frac{\beta}{2}$;

в) $1+\sin\gamma=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)$;

г) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

д) $\frac{1-\cos 2\beta}{\sin 2\beta}=\operatorname{tg}\beta$;

е) $\frac{\sin 2\gamma}{1+\cos 2\gamma}=\operatorname{tg}\gamma$.

789. Докажите тождество:

а) $\frac{\cos 2\beta}{\sin\beta\cos\beta+\sin^2\beta}=\operatorname{ctg}\beta-1$;

б) $\frac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\operatorname{tg}\varphi(1+\cos 2\varphi)=\sin 2\varphi$;

г) $2\operatorname{tg}2\varphi\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$.

790. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{y}{2}-\operatorname{tg}\frac{y}{2}$;

в) $\frac{\cos a\cdot\sin a}{\cos^2 a-\sin^2 a}$;

г) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

791. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{5}{13}$. Найдите синус и косинус угла между боковыми сторонами.

792. Найдите значение переменной из промежутка:

а) $(\pi;\ 2\pi)$, удовлетворяющее равенству $\sin 2x-2\cos x=0$;

б) $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$, удовлетворяющее равенству $\cos 2y+3\sin y=1$;

в) $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$, удовлетворяющее равенству $2\sin z=\sin 2z$;

г) $(\pi;\ 2\pi)$, удовлетворяющее равенству $\sin^2 t=-\cos 2t$.

793. Вычислите $\sin 2\gamma$, $\cos 2\gamma$ и $\operatorname{tg}2\gamma$, учитывая, что:

а) $\sin\gamma=\frac{4}{5}$ и $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\gamma=-\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$;

в) $\operatorname{tg}\gamma=2{,}4$ и $\pi<\gamma<\frac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}\gamma=-2$ и $\frac{3\pi}{2}<\gamma<2\pi$.

794. Найдите:

а) $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$, учитывая, что $\sin\beta=\frac{3}{5}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

б) $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$, учитывая, что $\cos\beta=-\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$;

в) $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$, учитывая, что $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{12}{13}$ и $\pi<\gamma<2\pi$;

г) $\sin 4p$ и $\cos 4p$, учитывая, что $\cos 2p=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{4}<p<\frac{\pi}{2}$;

д) $\operatorname{tg}4\varphi$, учитывая, что $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{5}$.

795. Вычислите:

а) $\sin 2\alpha$, учитывая, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$;

б) $\sin 2\beta$, учитывая, что $\sin\beta - \cos\beta = -\frac{1}{3}$;

в) $\cos 2\alpha$, учитывая, что $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{2}{5}$;

г) $\cos 2\beta$, учитывая, что $\sin\beta - \cos\beta = \frac{4}{7}$;

д) $\operatorname{tg} 2\alpha$, учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6$;

е) $\operatorname{ctg} 2\beta$, учитывая, что $\operatorname{tg}\beta = -0{,}8$.

796. Докажите, что $\sin 2\beta < 2\sin\beta$, если $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найдите условие, при котором $\sin 2\beta = 2\sin\beta$.

797. Учитывая, что $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, установите, значение какого выражения больше:

а) $\cos 2\beta$ или $2\cos\beta$; б) $\operatorname{tg} 2\beta$ или $2\operatorname{tg}\beta$, если $\beta \ne \frac{\pi}{4}$.

798. Найдите наименьшее по модулю значение переменной, удовлетворяющее равенству:

а) $\sin 2k = \sin k$; б) $\sin t = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$; в) $1 + \sin^2 2u = 4\sin^2 u$.

799. Найдите значение переменной из промежутка:

а) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющее равенству $\sin^2 m - \cos^2 m = 0{,}5$;

б) $\left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right)$, удовлетворяющее равенству $\sin z \cdot \cos z = 0{,}25$;

в) $\left(\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$, удовлетворяющее равенству $\operatorname{tg} 2b = \operatorname{tg} b$.

800. Докажите, что если $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, то

$$4\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \sqrt{4\sin^4\varphi + \sin^2 2\varphi} = 2.$$

801. Учитывая, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, представьте произведением выражение:

а) $\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}$; б) $\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{1-\cos x}$.

802. Упростите выражение:

а) $1 - 2\sin^2\gamma + \cos 2\gamma$;

б) $(\cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta - \sin^2\beta)^2$;

в) $\cos 4z + 2\sin^2 2z$.

803. Выразите:

а) $\sin 3t$, $\cos 3t$, $\sin 4t$, $\cos 4t$ через $\sin t$, $\cos t$;

б) $\operatorname{tg} 3t$, $\operatorname{tg} 4t$ через $\operatorname{tg} t$.

804. Учитывая, что $\sin 36° = \cos 54°$, и используя формулы для $\sin 2\gamma$ и $\cos 3\gamma$, вычислите $\sin 18°$.

805. Учитывая, что:

а) $\cos z = \frac{3}{4}$ и $0 < z < \frac{\pi}{2}$, найдите $\sin\frac{z}{2}$, $\cos\frac{z}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$;

б) $\sin 2y = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{4}$, найдите $\cos y$, $\sin y$, $\operatorname{tg} y$.

806. Докажите тождество:

а) $1 + \sin\gamma = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)$;

б) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos x = 1$;

г) $\cos^2 h - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - g\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2g\right)$;

д) $\sin^2 g - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - g\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2g - \frac{\pi}{4}\right)$;

е) $2\cos^2 y - \cos 2y = 1$.

807. Учитывая, что:

а) $\cos\beta = \frac{1}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, найдите $\sin\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$;

б) $\sin\gamma = 0{,}28$ и $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$, найдите $\sin\frac{\gamma}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$;

в) $\cos\varphi = -\frac{8}{17}$ и $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, найдите $\sin\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$;

г) $\sin\varphi = -\frac{24}{25}$ и $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$, найдите $\sin\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

808. Найдите синус, косинус и тангенс угла:

а) $22°\,30'$; в) $67°\,30'$; д) $7°\,30'$;
б) $15°$; г) $11°\,15'$; е) $33°\,45'$.

809. В равнобедренном треугольнике косинус угла между боковыми сторонами равен $\frac{7}{25}$. Найдите синус и косинус угла при основании.

810. Найдите $\sin a$, $\cos a$ и $\operatorname{tg} a$, учитывая, что $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$.

811. Учитывая, что:

а) $\sin\beta = \frac{336}{625}$ и $\frac{5\pi}{2} < \beta < 3\pi$, найдите $\sin\frac{\beta}{4}$;

б) $\cos 2\gamma = -\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{2}$, найдите $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{4}$;

в) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}$ и $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, найдите $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

812. Выразите:

а) $\sin\frac{a}{2}$ и $\cos\frac{a}{2}$ через $\sin a$;

б) $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ через $\operatorname{tg} b$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{c}{2}$ через $\operatorname{ctg} c$.

813. Найдите значение переменной из промежутка:

а) $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, удовлетворяющее равенству $1 - \cos t = \sin\frac{t}{2}$;

б) $(2\pi; 4\pi)$, удовлетворяющее равенству $1 - \cos h = \sin h$;

в) $\left(\frac{9\pi}{2}; 5\pi\right)$, удовлетворяющее равенству $1 + \cos g = \cos\frac{g}{2}$.

814. Упростите выражение:

а) $\sqrt{2(1+\cos 2x)}$, если $\frac{\pi}{2} < x < \pi$;

б) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4y}$, если $\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2}$;

в) $\frac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}$;

г) $\frac{\sin b}{1+\cos b}$;

д) $\frac{1-\sin 2p}{1+\sin 2p}$;

е) $\frac{1-\cos 2q}{\sin 2q}$.

815. Учитывая, что:

а) $\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = 2{,}2$, найдите $\sin 2\beta$ и $\cos 2\beta$;

б) $\frac{\cos 3\gamma}{\cos\gamma} = \frac{39}{41}$, найдите $\sin 2\gamma$ и $\cos 2\gamma$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, найдите $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$.

816. Вычислите:

а) $1 - 2\sin^2 15°$;

б) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$;

в) $\frac{1-2\sin^2 22°30'}{2\cos^2 15° - 1}$;

г) $\frac{2\operatorname{tg}15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$;

д) $\frac{2\operatorname{ctg}^2 15°}{1-\operatorname{ctg}^2 15°}$;

е) $\frac{1+\operatorname{tg}^2 9°}{2\operatorname{tg} 9°}$.

817. Используя формулы понижения степени, выразите через синус и косинус в первой степени выражение:

а) $\sin^3 x$; б) $\sin^4 y$; в) $\sin^2 z \cdot \cos^4 z$.

818. Установите истинность равенства:

а) $\sin 35° + \sin 25° = \cos 5°$;

б) $\cos 48° - \cos 12° = -\sin 18°$;

в) $\sin 40° + \cos 70° = \cos 10°$;

г) $\sin 100° - \sin 40° = \cos 70°$.

819. Преобразуйте в произведение выражение:

а) $\sin 40° + \sin 80°$;

б) $\sin 80° - \sin 40°$;

в) $\cos 50° + \cos 20°$;

г) $\cos 15° - \cos 25°$;

д) $\sin 40° - \cos 25°$;

е) $\sin 20° + \cos 80°$;

ж) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{ctg} 80°$;

з) $\operatorname{tg} 95° - \operatorname{ctg} 15°$.

820. Представьте произведением выражение:

а) $\sin 24° + \sin 26°$;

б) $\sin 5r - \sin 3r$;

в) $\cos 23° + \cos 43°$;

г) $\cos 1 - \cos 5$;

д) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

е) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

ж) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$;

з) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$.

821. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos 52° + \cos 18°$;

б) $\cos 78° - \cos 18°$;

в) $\sin 133° - \sin 13°$;

г) $\operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 35°$;

д) $\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{10}$;

е) $\sin\frac{\pi}{15} - \sin\frac{4\pi}{15}$;

ж) $\cos x + \cos 5x$;

з) $\sin x + \sin 7x$;

и) $\sin 3d - \sin d$;

к) $\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} d$;

л) $\cos(x-2y) - \cos(x+2y)$;

м) $\sin(x+3y) - \sin(x-3y)$.

822. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 35° - \sin 25°}{\sin 35° + \sin 25°}$;

б) $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$;

в) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}$;

г) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

823. Представьте произведением выражение:

а) $\sin 17° + \cos 29°$;

б) $\cos 40° - \sin 40°$;

в) $\sin 19° + 2\sin 25° + \sin 31°$;

г) $\sin c - \cos d$;

д) $\sin b + \cos b$;

е) $2\cos 2x + \cos 5x + \cos x$.

824. Представьте произведением выражение:

а) $1 - 2\cos\beta + \cos 2\beta$;
б) $\sin\gamma + \sin 2\gamma + \sin 3\gamma$;
в) $\cos z - \cos 2z - \cos 3z$;
г) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$;
д) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha - \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$;
е) $\dfrac{\sin a + \sin 2a + \sin 5a + \sin 7a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a}$.

825. Представьте произведением выражение:

а) $\sin^2 a - \sin^2 b$;
б) $\cos^2 a - \cos^2 b$;
в) $\sin^2 a - \cos^2 b$;
г) $\cos^2 16° - \sin^2 20°$;
д) $\sin^2 5q - \sin^2 3q$;
е) $1 - \cos^2 y - \cos^2 z$.

826. Установите истинность равенства:

а) $\dfrac{\sin 25° + \sin 15°}{\sin 25° - \sin 15°} = \operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{ctg} 5°$;

б) $\cos^3 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2 = 1$;

в) $16\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = 1$;

г) $\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 60° = \dfrac{8}{\sqrt{3}}\cos 20°$.

827. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = -\operatorname{ctg}\dfrac{a-b}{2}$;
б) $\dfrac{\operatorname{tg} 2z \cdot \operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} 2z - \operatorname{tg} z} = \sin 2z$;
в) $\dfrac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \varphi\right)$;
г) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$;
д) $\dfrac{\operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - 1} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - y\right)$;
е) $\dfrac{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma} = \operatorname{ctg}(\beta+\gamma) \cdot \operatorname{tg}\gamma$.

828. Представьте произведением выражение:

а) $\cos a - \sin a$;
б) $\cos k + \sin k$;
в) $\dfrac{1}{2} - \cos\varphi$;
г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sin k$;
д) $1 + 2\cos\varphi$;
е) $2\sin a - \sqrt{3}$.

829. Докажите тождество:

а) $\sqrt{2} + 2\cos a = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{a}{2}\right)$;

б) $3 - 4\sin^2 b = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + b\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - b\right)$;

в) $1 - 4\cos^2 c = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + c\right) \cdot \sin\left(c - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

г) $(\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 4\cos^2\dfrac{a-b}{2}$;

д) $\sin^2(x+y) - \sin^2(x-y) = \sin 2x \cdot \sin 2y$;

е) $\cos^2(x+y) - \cos^2(x-y) = -\sin 2x \cdot \sin 2y$;

ж) $1 + \cos z + \cos 2z = 4\cos z \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{z}{2}\right)$;

з) $\cos z + \cos 2z + \cos 3z = 4\cos 2z \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{z}{2}\right)$.

830. Докажите тождество:

а) $\sin d - \sin 2d + \sin 3d = 4\cos\dfrac{3d}{2} \cdot \cos d \cdot \sin\dfrac{d}{2}$;

б) $\sqrt{1 + \sin\varphi} - \sqrt{1 - \sin\varphi} = 2\sin\dfrac{\varphi}{2}$, учитывая, что $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\sin\gamma + \sin 3\gamma + \sin 5\gamma + \sin 7\gamma = 4\cos\gamma \cdot \cos 2\gamma \cdot \sin 4\gamma$;

г) $\cos^2 k + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + k\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - k\right) = \dfrac{3}{2}$;

д) $1 - \operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}$;

е) $\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\varphi} = \dfrac{\sqrt{-\cos 2\varphi}}{\sin\varphi}$.

831. Докажите, что значение выражения

$$\cos^2\alpha + \cos^2(\beta+\alpha) - 2\cos\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cos(\beta+\alpha)$$

не зависит от переменной α.

832. Учитывая, что углы треугольника связаны отношением

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \cos(A-B)\cos C - \cos^2 C = \frac{1}{4},$$

найдите угол C.

833. Учитывая, что A, B, C — углы треугольника, докажите тождество:

а) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2} \cdot \cos\dfrac{B}{2} \cdot \cos\dfrac{C}{2}$;

б) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\dfrac{A}{2} \cdot \sin\dfrac{B}{2} \cdot \cos\dfrac{C}{2}$;

в) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$;

г) $\sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin B \cdot \cos C + \cos A \cdot \cos B \cdot \sin C =$
$= \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$;

д) $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2} = \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$;

е) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$;

ж) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 = 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$;

з) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A \cdot \sin B \cdot \cos C$;

и) $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$.

834. Учитывая, что $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, представьте произведением выражение:

а) $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$; б) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$.

835. Выразите суммой произведение:

а) $2 \sin 15° \cdot \cos 10°$; д) $\cos 15° \cdot \cos 5°$;
б) $\sin\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{5}$; е) $\cos n \cdot \cos(n+1)$;
в) $2 \cos 3 \cdot \sin 2$; ж) $2 \cos(k+l) \cdot \cos(k-l)$;
г) $\sin(f-g) \cdot \cos(f+g)$; з) $\cos\left(\frac{m}{2}+2\right) \cdot \cos\left(\frac{3m}{2}+1\right)$.

836. Выразите суммой произведение:

а) $\sin 55° \cdot \sin 33°$; е) $4 \sin 12° \cdot \sin 14° \cdot \sin 16°$;
б) $2 \sin a \cdot \sin 2a$; ж) $4 \cos 25° \cdot \cos 35° \cdot \cos 15°$;
в) $2 \sin(k+l) \cdot \sin(k-l)$; з) $8 \cos 1° \cdot \cos 2° \cdot \cos 4° \cdot \cos 8°$;
г) $\sin 10° \cdot \cos 8° \cdot \cos 6°$; и) $8 \sin A \cdot \sin 2A \cdot \sin 3A \cdot \sin 4A$;
д) $4 \sin 25° \cdot \cos 15° \cdot \sin 5°$; к) $8 \sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \sin 4 \cdot \cos 8$.

837. Найдите значение выражения:

а) $\sin 50° \cdot \sin 15°$; г) $\sin 15° \cdot \cos 45°$;
б) $\sin 33° \cdot \cos 47°$; д) $\sin\frac{\pi}{24} \cdot \sin\frac{5\pi}{24}$;
в) $\sin 12° \cdot \cos 8° \cdot \cos 10°$; е) $\cos 75° \cdot \sin 105°$.

838. Представьте произведением выражение:

а) $1 + \cos z$; д) $\sin a - \operatorname{tg} a$; и) $1 - 2\sin^2 a$;
б) $1 - \cos y$; е) $\operatorname{ctg} b - \cos b$; к) $1 - 2\cos^2 b$;
в) $1 + \sin z$; ж) $\sin a + \operatorname{tg} a$; л) $1 + 2\cos z$;
г) $1 - \sin t$; з) $\operatorname{ctg} x + \cos x$; м) $1 - 2\cos t$.

839. Вычислите:

а) $l \sin 2a + k \cos 2a$, учитывая, что $\operatorname{tg} a = \frac{l}{k}$;

б) $\cos(a+b)$ и $\sin(a+b)$, учитывая, что $\sin a + \sin b = s$ и $\cos a + \cos b = t$.

---

840. Постройте сечение призмы, изображенной на рисунке 346, плоскостью MNK.

841. Постройте сечение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, изображенной на рисунке 347, плоскостью, которая проходит через точку M на ребре AA_1 и пересекает плоскость основания по прямой m.

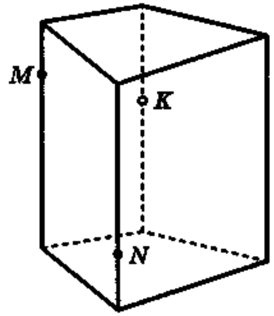


Рис. 346

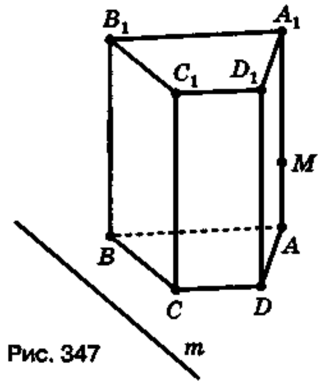


Рис. 347

842. На рисунке 348 изображена призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте ее сечение плоскостью, которая проходит через точку M на грани AA_1B_1B и пересекает плоскость основания по прямой l.

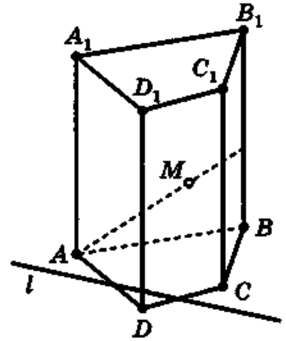


Рис. 348

843. Найдите больший корень уравнения:

а) $1 - \frac{25}{x^2} = \frac{24}{x}$;

б) $x - 1 = \frac{12}{x}$;

в) $(x + 0{,}5)(x^2 - 9) = (2x + 1)(x + 3)^2$;

г) $\frac{x^3 - 8}{2x - 4} = 12x - 18$.

844. Найдите среднее арифметическое корней уравнения:

а) $7 - 2x = \frac{3}{x}$; в) $(2x + 8)^2(13x - 39) = 26(4x^2 - 64)(x - 3)$;
б) $\frac{4}{x} + 5 = \frac{1}{x^2}$; г) $\frac{x^3 + 64}{16 + 4x} = 11 - \frac{x}{4}$.

845. Когда собрали урожай пшеницы с двух полей площадью 48 га и 36 га, то оказалось, что средняя урожайность равна 37 ц/га. Сколько зерна собрали с каждого поля, учитывая, что урожайность на втором поле оказалась на 21 ц/га меньшей?

846. Площадь основания цилиндра с высотой 14 см на 23 см² меньше площади основания другого цилиндра с высотой 9 см. Найдите объемы цилиндров, учитывая, что их

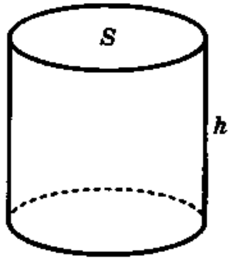
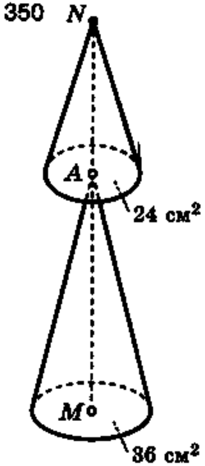


Рис. 349

Рис. 350



суммарный объем равен 759 см^3, и объем V цилиндра, площадь S его основания и высота h связаны формулой $V = Sh$ (рис. 349).

847. На отрезке MN выбрали такую точку A, что $AM - AN = 5$ см, и на отрезках-частях AM и AN как на высотах построили конусы с площадями оснований, равными 24 см^2 и 36 см^2 соответственно (рис. 350). Найдите объемы конусов, учитывая, что суммарный их объем равен 220 см^3, и объем V конуса, площадь S его основания и высота h связаны формулой $V = \frac{1}{3}Sh$.

* * *

848. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-d)^2}+\sqrt{d^2+(1-a)^2}.$$

849. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 2. Найдите диагональ AC, учитывая, что длина ломаной $ABDC$ не превосходит 4.

850. Найдите разность между наибольшим и наименьшим десятизначными числами, кратными 11, в десятичной записи которых цифры не повторяются.

17. Преобразования тригонометрических выражений

С введением действий нахождения значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса порождается новый класс выражений.

Тригонометрическим выражением называется выражение, содержащее переменные под знаком синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

Например, выражения

$$\cos x,\ t - 2 + \cos^2 2t$$

являются тригонометрическими, а выражения

$$\mathrm{tg}^2\, 2 + 7\cos\frac{\pi}{8} + 3,\ y^2 - \cos\frac{12}{13} + 1$$

тригонометрическими не являются: первое из них не содержит переменных, а второе хотя и содержит переменную y, но не под знаком синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

При преобразованиях тригонометрических выражений используют свойства синуса, косинуса, тангенса, котангенса, доказанные выше тригонометрические формулы, а также свойства действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня.

Пример 1. Упростим числовое выражение

$$\cos\frac{7\pi}{9}\sin\frac{17\pi}{18} - \cos\frac{17\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}.$$

Сначала, используя формулы приведения, приведем выражения $\cos\frac{7\pi}{9}$, $\sin\frac{17\pi}{18}$ и $\cos\frac{17\pi}{18}$ к равным им выражениям с аргументами из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\cos\frac{7\pi}{9}\ \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{9}\right) = -\cos\frac{2\pi}{9};$$

$$\sin\frac{17\pi}{18} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{18}\right) = \sin\frac{\pi}{18};$$

$$\cos\frac{17\pi}{18} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{18}\right) = -\cos\frac{\pi}{18}.$$

Значит,

$$\cos\frac{7\pi}{9}\sin\frac{17\pi}{18} - \cos\frac{17\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18} = -\cos\frac{2\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18} - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)\cos\frac{5\pi}{18} =$$

$$= \cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18} - \cos\frac{2\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18} = \cos\frac{\pi}{18}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{18}\right) - \cos\frac{2\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18} =$$

$$= \sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} - \cos\frac{2\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18} = \sin\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{18}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Упростим числовое выражение $\sin 15° - \sqrt{3}\cos 15°$.

Структура выражения $\sin 15° - \sqrt{3}\cos 15°$ подсказывает, что его можно преобразовать в правую часть какой-либо формулы сложения. Действительно, если его умножить и разделить на 2, то получим выражение $2\left(\frac{1}{2}\sin 15° - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15°\right)$, в котором числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ можно заменить равными им числами $\cos 60°$ и $\sin 60°$. С учетом этого последовательно получаем:

$$\sin 15° - \sqrt{3}\cos 15° = 2\left(\frac{1}{2}\sin 15° - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15°\right) =$$
$$= 2(\cos 60° \sin 15° - \sin 60° \cos 15°) =$$
$$= -2(\sin 60° \cos 15° - \cos 60° \sin 15°) =$$
$$= -2\sin(60° - 15°) = -2\sin 45° = -\sqrt{2}.$$

Подобным образом можно преобразовать любое выражение вида $a\sin t + b\cos t$.

▶ **Теорема 14.** *Если $a \neq 0$ или $b \neq 0$, то*

$$a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(t+u),$$

где $\cos u = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *и* $\sin u = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Доказательство. Пусть a, b, t — действительные числа, причем $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Тогда $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ и

$$a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right).$$

Теперь обратим внимание на то, что

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Это означает, что точка $M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ принадлежит тригонометрической окружности (рис. 351). Пусть u — число, которому соответствует точка M. Тогда истинны равенства:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos u; \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin u.$$

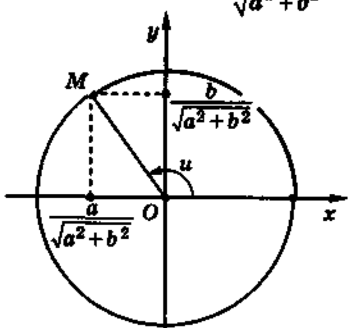


Рис. 351

Значит,

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}(\sin t\cos u + \cos t\sin u) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(t+u).$$

Доказанная формула называется *формулой вспомогательного угла.*

Отметим, что на практике на заключительном этапе преобразования выражений вида $a\sin t + b\cos t$ не обязательно пользоваться именно формулой синуса суммы, можно использовать любую из формул сложения.

Пример 3. Представим произведением выражение $\sin x + \cos x$.

Поскольку $a = 1$ и $b = 1$, то $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, и потому получаем:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). ◀$$

Пример 4. Найдем значение выражения $\frac{\sin^3 z + 2\cos^2 z\sin z}{\sin z + 2\cos z}$, учитывая, что $\operatorname{ctg} z = -4$.

Поскольку $\sin z \neq 0$, то будем последовательно получать:

$$\frac{\sin^3 z + 2\cos^2 z\sin z}{\sin z + 2\cos z} \overset{(1)}{=} \frac{\sin^3 z\left(1 + 2\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}\right)}{\sin z\left(1 + 2\frac{\cos z}{\sin z}\right)} \overset{(2)}{=} \frac{\sin^2 z(1 + 2\operatorname{ctg}^2 z)}{(1 + 2\operatorname{ctg} z)} \overset{(3)}{=}$$
$$= \frac{1 + 2\operatorname{ctg}^2 z}{(1 + \operatorname{ctg}^2 z)(1 + 2\operatorname{ctg} z)}.$$

Здесь мы использовали: (1) — вынесение в числителе множителя $\sin^3 z$, в знаменателе — множителя $\sin z$; (2) — сокращения дроби на $\sin z$; (3) — тождество $\sin^2 z = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 z}$.

Полученное выражение зависит от $\operatorname{ctg} z$, значение которого по условию равно -4. Поэтому

$$\frac{1 + 2\operatorname{ctg}^2 z}{(1 + \operatorname{ctg}^2 z)(1 + 2\operatorname{ctg} z)} = \frac{1 + 2\cdot(-4)^2}{(1 + (-4)^2)(1 + 2\cdot(-4))} = \frac{33}{17\cdot(-15)} = -\frac{11}{85}.$$

Пример 5. Вычислим значение выражения $\operatorname{ctg} 9° - \operatorname{ctg} 27° - \operatorname{ctg} 63° + \operatorname{ctg} 81°$.

Обратим внимание на то, что аргументы первого и третьего слагаемых, а также второго и четвертого слагаемых вместе составляют 90°. Это подсказывает выполнить соответствующую группировку слагаемых данной алгебраической суммы и выполнить дальнейшие преобразования:

$$\operatorname{ctg} 9° - \operatorname{ctg} 27° - \operatorname{ctg} 63° + \operatorname{ctg} 81° =$$
$$= (\operatorname{ctg} 9° + \operatorname{ctg} 81°) - (\operatorname{ctg} 27° - \operatorname{ctg} 63°) =$$
$$= \left(\frac{\cos 9°}{\sin 9°} + \frac{\cos 81°}{\sin 81°}\right) - \left(\frac{\cos 27°}{\sin 27°} + \frac{\cos 63°}{\sin 63°}\right) =$$
$$= \frac{\sin 81°\cos 9° + \cos 81°\sin 9°}{\sin 9°\sin 81°} - \frac{\sin 63°\cos 27° + \cos 63°\sin 27°}{\sin 27°\sin 63°} =$$

$$= \frac{\sin(81^\circ+9^\circ)}{\sin 9^\circ \sin 81^\circ} - \frac{\sin(63^\circ+27^\circ)}{\sin 27^\circ \sin 63^\circ} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 9^\circ \sin 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\sin 27^\circ \sin 63^\circ} =$$

$$= \frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{1}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \frac{2}{2\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{2}{2\sin 27^\circ \cos 27^\circ} =$$

$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = 2\,\frac{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} =$$

$$= 2\,\frac{2\sin\frac{54^\circ-18^\circ}{2}\cos\frac{54^\circ+18^\circ}{2}}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 4\,\frac{\sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 4.$$

Пример 6. Упростим выражение-произведение

$$\cos y \cos 2y \cdot \cos 4y \cos 8y.$$

Обращает на себя внимание то, что аргумент каждого множителя вдвое меньше аргумента следующего множителя. Здесь можно использовать умножение и деление выражения на $2\sin y$:

$$\cos y \cos 2y \cos 4y \cos 8y =$$

$$= \frac{1}{2\sin y}(2\sin y \cos y)\cos 2y \cos 4y \cos 8y =$$

$$= \frac{1}{2\sin y}\sin 2y \cos 2y \cos 4y \cos 8y =$$

$$= \frac{1}{4\sin y}(2\sin 2y \cos 2y)\cos 4y \cos 8y =$$

$$= \frac{1}{8\sin y}(2\sin 4y \cos 4y)\cos 8y =$$

$$= \frac{1}{16\sin y}(2\sin 8y \cos 8y) = \frac{\sin 16y}{16\sin y}.$$

Пример 7. Найдем значение выражения-суммы

$$\cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{6\pi}{11} + \cos\frac{8\pi}{11} + \cos\frac{10\pi}{11}.$$

Особенностью данного выражения является то, что аргумент A очередного слагаемого $\cos A$ на $\frac{2\pi}{11}$ больше аргумента предыдущего слагаемого. Здесь можно использовать умножение и деление выражения на $2\sin\frac{\pi}{11}$:

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{11}}\left(2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{6\pi}{11} + \right.$$

$$\left. + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{8\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{10\pi}{11}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{11}}\left(-\sin\frac{\pi}{11} + \sin\frac{3\pi}{11} - \sin\frac{3\pi}{11} + \sin\frac{5\pi}{11} - \sin\frac{5\pi}{11} + \sin\frac{7\pi}{11} - \sin\frac{7\pi}{11} + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{9\pi}{11} - \sin\frac{9\pi}{11} + \sin\frac{11\pi}{11}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{11}}\left(-\sin\frac{\pi}{11} + 0\right) = -\frac{1}{2}.$$

Пример 8. Докажем, что

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - v\right) - \sin^2\left(v - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\frac{5\pi}{12}\cos\left(2v + \frac{\pi}{12}\right) = \sin 2v.$$

Будем последовательно преобразовывать левую часть данного равенства:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - v\right) - \sin^2\left(v - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\frac{5\pi}{12}\cos\left(2v + \frac{\pi}{12}\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \left(2v + \frac{\pi}{12}\right)\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \left(2v + \frac{\pi}{12}\right)\right)\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right) - 1 + \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{12} - 2v - \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{12} + 2v + \frac{\pi}{12}\right)\right) \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2v + \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2v\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2v\right)\right) \overset{(4)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\sin 2v + \sin 2v\right) + \left(\cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right)\right)\right) \overset{(5)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}(2\sin 2v + 0) = \sin 2v.$$

Здесь мы использовали: (1) — формулы понижения степени и формулу произведения косинусов; (2) — вынесение множителя $\frac{1}{2}$ за скобки и раскрытие скобок; (3) — формулу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right)$ и приведение подобных; (4) — формулу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2v\right)$, тождество $\cos(-t) = \cos t$ и группировку слагаемых алгебраической суммы; (5) — приведение подобных.

Пример 9. Найдем $\sin 18^\circ$.

Учтем, что $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$. Теперь перейдем к углу 18°, учитывая, что

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t \text{ и } \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t.$$

Значит:

$$2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ;$$
$$2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3;$$
$$2\sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3;$$
$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0.$$

Получили, что число $\sin 18^\circ$ — один из корней квадратного уравнения $4x^2 + 2x - 1 = 0$, которые определяются выражением $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Учитывая, что $\sin 18^\circ > 0$, имеем:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

1. Какое выражение называется тригонометрическим?
2. Какая есть связь между значениями синуса, косинуса, тангенса и котангенса чисел t и $-t$?
3. Как связаны между собой синус, косинус, тангенс, котангенс одного числа?
4. Запишите формулы сложения для синуса, косинуса и тангенса суммы и разности двух чисел.
5. Сформулируйте мнемоническое правило, позволяющее записать любую формулу приведения.
6. Запишите: для синуса и косинуса формулы двойного аргумента, формулы половинного аргумента; формулы понижения степени; формулы преобразования в произведение суммы синусов, разности синусов, суммы косинусов и разности косинусов; формулы преобразования в сумму произведения синусов, произведения косинусов, произведения синуса и косинуса.
7. Запишите формулы, выражающие синус, косинус и тангенс данного аргумента через тангенс вдвое меньшего аргумента.
8. Запишите формулу вспомогательного угла.

851. Выразите в радианах угол α, равный $-210°$, и найдите:

а) $\sin\alpha$; д) $\sin 2\alpha$; и) $\sin\frac{1}{2}\alpha$; н) $\sin 3\alpha$;

б) $\cos\alpha$; е) $\cos 2\alpha$; к) $\cos\frac{1}{2}\alpha$; о) $\cos 3\alpha$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$; ж) $\operatorname{tg} 2\alpha$; л) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$; п) $\operatorname{tg} 3\alpha$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha$; з) $\operatorname{ctg} 2\alpha$; м) $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha$; р) $\operatorname{ctg} 3\alpha$.

852. Найдите значение выражения:

а) $4\sin 45°\operatorname{ctg} 60°\operatorname{ctg} 30° - 3\cos 45°$;

б) $2\operatorname{ctg} 30°\operatorname{tg} 60° + \sin 60° - 6\cos 90°$;

в) $\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2 30° - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos 60°$;

г) $\sqrt{1 - 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{\left(1 - 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}$;

д) $\dfrac{6\sin 30°\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2 30°}$;

е) $\dfrac{1-\cos^2 30°}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1}$;

ж) $\left|\sin\frac{3\pi}{4}\right| + \left|\frac{\pi}{3} - \sqrt{2}\right| + \left|\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right|$;

з) $\left|\cos\frac{2\pi}{3}\right| + \left|\frac{\pi}{2} - \sqrt{3}\right| + \left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right|$.

853. Определите знак числа:

а) $\sin 1001°\cos 1989°\operatorname{ctg} 811°$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)$;

в) $\cos 10°\sin 145°\operatorname{tg} 250°\operatorname{ctg} 95°$;

г) $\cos 22$;

д) $\sin\left(\frac{8\pi}{3} + \sqrt{2}\right)$;

е) $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}} - \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}}$;

ж) $\operatorname{tg}\left(\pi\sqrt{10}\right)$;

з) $\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$.

854. Сравните числа:

а) $\sin 10$ и $\sin 11$;

б) $\sin 3$ и $\cos 5$;

в) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 3$;

г) $\cos 10$ и $\cos 11$;

д) $\operatorname{ctg}\left(\pi\sqrt{2}\right)$ и $\operatorname{ctg}\left(\pi\sqrt{3}\right)$;

е) $\sin 5$ и $\cos 3$;

ж) $\sqrt{1 + 2\sin\frac{\pi}{5}}$ и $\cos\frac{\pi}{5}$;

з) $\sin 5$ и $\operatorname{tg} 3$.

855. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos 71°\cos 334° + \cos 19°\cos 64°}{\cos 8°\cos 37° - \cos 82°\cos 53°}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg} 70° - \operatorname{tg} 25°}{1 + \operatorname{ctg} 65°\operatorname{ctg} 20°}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 10° + \operatorname{ctg} 55°}{1 - \operatorname{tg} 10°\operatorname{ctg} 55°}$;

г) $\dfrac{\operatorname{ctg} 17°\left(1 - \operatorname{tg}^2 17°\right)}{4\operatorname{ctg} 34°}$;

д) $\dfrac{2\left(\sin 166° + \sin^2 38°\right)}{1 - \cos^2 52°}$;

е) $\dfrac{\operatorname{ctg} 50° + \operatorname{ctg} 80°}{1 + \operatorname{ctg} 85°\cdot\operatorname{tg} 140°}$.

856. Учитывая, что $\pi < a < 2\pi$, упростите выражение

$$\sqrt{\frac{2\sin a - \sin 2a}{2\sin a + \sin 2a}}.$$

857. Упростите выражение:

а) $2\cos 50° - 3\sin 340° - 2\sin 40° + 3\cos 110°$;

б) $\sqrt{\left(1 - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi + x}{2}\right)\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi + x}{2}\right) - 1\right)}$; где $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

в) $\sqrt{\dfrac{1 + \sin(y + \pi)}{1 - \sin(y - \pi)}} - \sqrt{\dfrac{1 + \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}}$, где $y \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\right)$;

г) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos(\pi - t)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)}$;

д) $\dfrac{\sin^3\left(a - \frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi - b)}{\operatorname{ctg}^3\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(b - \frac{3\pi}{2}\right)}$;

е) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-v\right)}{\cos(\pi+v)\cdot\mathrm{ctg}(\pi-u)}$.

858. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cdot\mathrm{tg}(\pi+\beta)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\sin(\beta-\pi)\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$;

б) $\dfrac{\mathrm{tg}\,615^\circ-\mathrm{tg}\,555^\circ}{\mathrm{tg}\,795^\circ+\mathrm{tg}\,735^\circ}$;

в) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{18}}{\cos 19^\circ\sin 79^\circ-\sin 11^\circ\cos 71^\circ}$;

г) $\dfrac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$.

859. Учитывая, что:

а) $\mathrm{tg}\,z=2$, найдите $\sin 2z$, $\cos 2z$ и $\mathrm{tg}\,2z$;

б) $\mathrm{ctg}\,t=3$, найдите $\dfrac{\sin^3 a+2\cos^2 a\sin a}{\sin a+2\cos a}$;

в) $\mathrm{tg}\,c-\mathrm{ctg}\,c=-3$, найдите $\mathrm{tg}^2\,c+\mathrm{ctg}^2\,c$;

г) $x+y=\frac{3\pi}{4}$, найдите $(1+\mathrm{ctg}\,x)(1+\mathrm{ctg}\,y)$.

860. Упростите выражение:

а) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)\mathrm{tg}(5\pi-a)+\sin(a-2\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$;

б) $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

в) $\sin^2 u+\cos\left(\frac{\pi}{3}-u\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-u\right)$;

г) $1+\cos 2y\,\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}-y\right)-\sin 2y$;

д) $\mathrm{tg}\,b+2\,\mathrm{ctg}\,2b-\mathrm{ctg}\,b$;

е) $\dfrac{1-2\sin^2 v}{2\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+v\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-v\right)}$;

ж) $\mathrm{ctg}\,t-2\,\mathrm{tg}\,2t-\mathrm{tg}\,t-4\,\mathrm{ctg}\,4t$;

з) $\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\lambda+(\mathrm{tg}\,\gamma+\mathrm{tg}\,\lambda)\,\mathrm{ctg}(\gamma+\lambda)$;

и) $\dfrac{\sin^3\left(z-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(3z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(z-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(z+\frac{\pi}{3}\right)}$;

к) $\dfrac{\cos i+\sin 2i}{1-\cos 2i+\sin i}-\mathrm{ctg}\,i$.

861. Докажите, что если α, β, γ — внутренние углы треугольника, то:

а) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

б) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2$.

862. Упростите выражение:

а) $\cos^2\left(\frac{17\pi}{8}-x\right)-\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-x\right)$;

б) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-a\right)-\left(\cos\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+2a\right)$;

в) $\sin^6 s+3\sin^2 s\cos^2 s+\cos^6 s$;

г) $3(\sin^4 t+\cos^4 t)-2(\sin^6 t+\cos^6 t)$;

д) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 a+\mathrm{ctg}^2 a-6}{\mathrm{tg}^2 a+\mathrm{ctg}^2 a+2}$;

е) $\dfrac{\sin r-3\sin 2r+\sin 3r}{\cos r-3\cos 2r+\cos 3r}$;

ж) $\sqrt{\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{y}{2}\right)\left(\mathrm{ctg}^2\frac{y}{2}-1\right)}$;

з) $\sqrt{(1-\sin x\sin y)^2-\cos^2 x\cos^2 y}$;

и) $\sqrt{(\cos v-\cos v)^2+(\sin v+\sin v)^2}$;

к) $\dfrac{\left(\mathrm{tg}^2\left(w-\frac{\pi}{4}\right)-\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-w\right)\right)\cos^2 2w}{\sin 2w}$;

л) $2\dfrac{\cos^4 p+\sin^4 p}{1+\cos^2 2p}-\dfrac{2\cos^2 p-1}{\cos^4 p-\sin^4 p}$.

863. Докажите тождество:

а) $(1+\mathrm{tg}\,x)\cos^3 x+(1+\mathrm{ctg}\,x)\sin^3 x=\sin x+\cos x$;

б) $\mathrm{ctg}\,2y\,\mathrm{ctg}\,6y-\mathrm{ctg}\,4y\,\mathrm{ctg}\,2y+\mathrm{ctg}\,4y\,\mathrm{ctg}\,6y=-1$;

в) $\dfrac{\cos^3 a-\cos 3a}{\sin^3 a+\sin 3a}$;

г) $\dfrac{\sin b+\sin 3b+\sin 5b+\sin 7b}{\cos b-\cos 3b+\cos 5b-\cos 7b}=\mathrm{ctg}\,b$;

д) $1+\cos u+\cos v+\cos(u+v)=4\cos\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}\cos\frac{u+v}{2}$;

е) $(\sin r-\sin s)(\sin r+\sin s)=\sin(r-s)\sin(r+s)$;

ж) $\dfrac{\sin^2(c+d)+\sin^2(c-d)}{\cos^2 c\cos^2 d}=\mathrm{tg}^2\,c+\mathrm{tg}^2\,d$;

з) $4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3x$;

и) $\operatorname{ctg}^2 a + \operatorname{ctg}^2\left(a - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = 6 + 9\operatorname{ctg}^2 3a$;

к) $\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2\left(t - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{9}{\cos^2 3t}$.

864. Докажите, что:

а) если $a + b + c = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c = 1$;

б) $\sin^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(t - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{12}\cos\left(2t + \frac{\pi}{12}\right) = \sin 2t$;

в) $\cos 3v = -4\cos v \cos\left(v + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(v + \frac{2\pi}{3}\right)$.

865. Вычислите:

а) $\sin^2\frac{\pi}{8} + 3\cos^2\frac{3\pi}{8}$;

б) $\cos^4 15° - \sin^4 15°$;

в) $(\operatorname{tg} 255° - \operatorname{tg} 555°)(\operatorname{tg} 795° + \operatorname{tg} 195°)$;

г) $\sin^2 58° + \cos 56°\frac{\sin 13°}{\sin 17°} + 2\sin^2 74°(1 - \cos 32°) + \cos 56°\frac{\cos 13°}{\cos 17°}$.

866. Упростите:

а) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9}$;

в) $\sin^2 17° + \sin 17°\cos 47° + \cos^2 47°$;

г) $\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}$;

д) $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{9} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{9} + \operatorname{ctg}^2\frac{4\pi}{9}$;

е) $\frac{(\cos 5° - \sin 5°)^2}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}$.

867. Упростите выражение:

а) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5}$;

б) $\cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{10}$;

в) $\frac{\left(\sqrt{3}\sin 15° + \cos 15°\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)}{8\sin 75°}$;

г) $\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$;

д) $\operatorname{tg} 5°\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 5°\operatorname{tg} 65° + \operatorname{tg} 20°\operatorname{tg} 65°$;

е) $\frac{1 - \sin 4°}{1 + \cos 94°} + \frac{\sin 82°}{\sqrt{3}\cos 22° + \sin 22°}$.

868. Преобразуйте в произведение:

а) $\left(1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} + 3a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\right)\cos a$;

б) $\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\cos^2 b + \sin 2b$;

в) $3 - 4\cos 2c + \cos 4c - 8\cos^4 c$;

г) $\cos^2 z - 2\cos z\cos t\cos(z - t) + \cos^2 t$;

д) $\frac{2\sin 2f}{\left(\sin^2\left(\frac{f}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{f}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)\cos f}$;

е) $\sin^2(x + y) - \sin^2(x - y)$;

ж) $\sin 4d - \sin d + \sin 2d$;

з) $\operatorname{tg}(i - j) + \operatorname{tg}(j - k) + \operatorname{tg}(k - i)$;

и) $1 + \frac{1}{2\sin^2 l} + \frac{4\sin^2 l - 1}{\sin 2l}\operatorname{ctg} l$;

к) $\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} e} + \sqrt{\operatorname{tg} e}}{\sqrt{\operatorname{ctg} e} - \sqrt{\operatorname{tg} e}}$.

869. Докажите, что если α, β, γ — внутренние углы треугольника, то:

а) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

б) $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha} + \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} = 2$;

в) $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\sin\beta}{\cos\gamma\cos\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} = 2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)$;

г) $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant 1$;

д) $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}$.

870. Докажите, что:

а) если $x + y + z = \frac{3\pi}{2}$, то $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y\operatorname{ctg} z$;

б) для того чтобы один из углов α, β, γ треугольника был равен 60°, необходимо и достаточно, чтобы $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 0$.

871. Докажите, что:

а) если углы α, β, γ треугольника удовлетворяют равенству $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, то этот треугольник прямоугольный;

б) для того чтобы один из углов α, β, γ треугольника был равен 36° или 108°, необходимо и достаточно, чтобы $\sin 5\alpha + \sin 5\beta + \sin 5\gamma = 0$.

872. Найдите значение выражения:

а) $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$;

б) $\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ$;

в) $4 \sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \sin \frac{7\pi}{18}$;

г) $\frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}$;

д) $14 \sin 10^\circ - \frac{7\sqrt{3}}{2\cos 50^\circ}$;

е) $\frac{9\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{30}}{\sin\frac{4\pi}{15}}$.

873. Найдите значение выражения:

а) $16 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{3a}{2}$, учитывая, что $\cos a = \frac{3}{4}$;

б) $\sin^6 b + \cos^6 b$, учитывая, что $\cos 2b = t$;

в) $\operatorname{tg}(c + 2d)$, учитывая, что $\operatorname{tg} c = \frac{1}{7}$ и $\sin d = \frac{1}{\sqrt{10}}$;

г) $\operatorname{tg}^4 t + \operatorname{ctg}^4 t$, учитывая, что $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = a$;

д) $\sin(2u - v)$, учитывая, что $\operatorname{tg} u = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} v = \frac{3}{4}$, $u \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $v \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

е) $\frac{3\cos x + 4\sin x}{3\cos x - \sin x}$, учитывая, что $1 + 8\cos^2 x + 3\sin 2x = 0$.

874. Преобразуйте в произведение выражение $\cos x + \cos(x + y)\cos z + \cos y - \sin(y + z)\sin z + \cos z$.

875. Найдите значение выражения:

а) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$;

б) $\sin\left(3\arccos\frac{3}{5}\right)$;

в) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arcctg} 3)$;

г) $\operatorname{ctg}(3\operatorname{arctg} 2)$;

д) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin\frac{12}{13}\right)$;

е) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5} + 2\operatorname{arctg} 2\right)$.

876. Вычислите:

а) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$;

б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 0{,}3\pi)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$.

877. Найдите значения выражений $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$ и докажите, что $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

878. Учитывая, что $\sin\alpha + \sin\beta = x$ и $\cos\alpha + \cos\beta = y$ и $x^2 + y^2 \neq 0$, найдите $\cos(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha + \beta)$.

879. Найдите значение выражения:

а) $\sin 37^\circ \cos 61^\circ + \sin 61^\circ \cos 159^\circ + \sin 159^\circ \cos 119^\circ + \sin 119^\circ \cos 37^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 85^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$;

в) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$;

г) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$;

д) $\cos 5^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 75^\circ \cdot \cos 85^\circ$.

880. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{\cos^2 a} + \left(\frac{2}{\cos 2a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2^m}{\cos(2^m a)}\right)^2$;

б) $(2\cos x - 1)(2\cos 2x - 1)\ \ldots\ (2\cos(2^m x) - 1)$;

в) $\sin a + 2\sin 2a + 3\sin 3a + \ldots + m\sin ma$;

г) $\sin^3 t \cos 3t + \cos^3 t \sin 3t$;

д) $\frac{\sin 4a + \sin 5a + \sin 6a}{\cos 4a + \cos 5a + \cos 6a}$;

е) $\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{4}\cos\frac{a}{8}\ \ldots\ \cos\frac{a}{2^m}$;

ж) $\sqrt{1 + 2\cos\frac{\pi}{5}} + \sqrt{1 + 2\cos\frac{3\pi}{5}}$;

з) $\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ$;

и) $\sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}$;

к) $\frac{1 - \sin^4 a - \cos^4 a}{1 - \sin^6 a - \cos^6 a}$.

881. Докажите, что:

а) если $0 < x < \frac{\pi}{4}$, то $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \ldots = \frac{\sqrt{2}\cos x}{2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$;

б) если $t \neq \frac{k\pi}{3^m}$, где k — целое число, то $(1 + 2\cos 2t)(1 + 2\cos 6t)\ \ldots \times (1 + 2\cos(2\cdot 3^m t)) = \frac{\sin(3^{m+1} t)}{\sin t}$;

в) выражение $Q = \cos^2\left(a + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(a - \frac{\pi}{6}\right)$ при всех значениях переменной a принимает одно и то же значение, и найдите это значение.

882. Определите, при каких значениях переменной a истинно равенство

$$\cos a + \cos 3a + \ldots + \cos((2n - 1)a) = \frac{\sin(2na)}{2\sin a}.$$

883. Есть два прямоугольных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ с катетами A_1C_1 и A_2C_2, равными соответственно 6 и 5, причем гипотенуза A_1B_1 на 3 меньше гипотенузы A_2B_2. Найдите синусы углов B_1 и B_2 этих треугольников, учитывая, что их сумма равна $\frac{5}{6}$.

884. Верно ли утверждение:

а) если две точки окружности принадлежат плоскости, то окружность лежит в этой плоскости;
б) если три точки окружности принадлежат плоскости, то окружность лежит в этой плоскости?

885. Есть прямая a и точка G, не лежащая на ней. Докажите, что все прямые, проходящие через точку G и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

886. Все ребра правильной треугольной призмы $BDFACE$ равны друг другу, а площадь ее основания равна $16\sqrt{3}$ см^2. Найдите длину пространственной ломаной $BDEFB$.

887. Точки U и V — центры смежных граней AA_1C_1C и $A_1C_1E_1G_1$ куба $ACEGA_1C_1E_1G_1$, ребро которого равно l. Найдите расстояние между точками U и V.

888. Точка K делит пополам боковое ребро AR правильной четырехугольной пирамиды $APQRS$. Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая, что ее боковое ребро равно 16 см, а отрезок QK — 12 см.

889. В основании прямой призмы лежит параллелограмм, периметр которого равен 64 см, а разность периметров различных треугольников, на которые разделяется параллелограмм его диагоналями, — 16 см. Найдите диагонали боковых граней призмы, учитывая, что ее боковая поверхность равна 640 см^2.

890. Велосипедист от Слонима до Зельвы ехал со скоростью на $2\frac{2}{3}$ км/ч меньшей, чем от Зельвы до Волковыска (рис. 352). Определите время нахождения велосипедиста в дороге на втором участке пути, учитывая, что средняя скорость движения на всем пути оказалась равной 15 км/ч.

Рис. 352

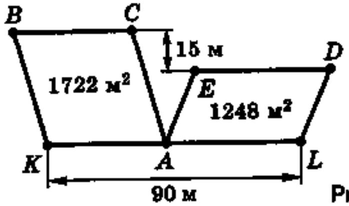


Рис. 353

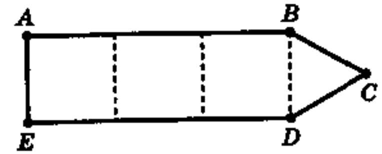


Рис. 354

891. На отрезке KL длиной 90 м выбрана точка A, и на отрезках-частях AK и AL как на основаниях построены параллелограммы $AKBC$ и $ALDE$ с площадями 1722 м^2 и 1248 м^2 соответственно (рис. 353). Найдите длину отрезка AK, учитывая, что высота первого параллелограмма на 15 м больше.

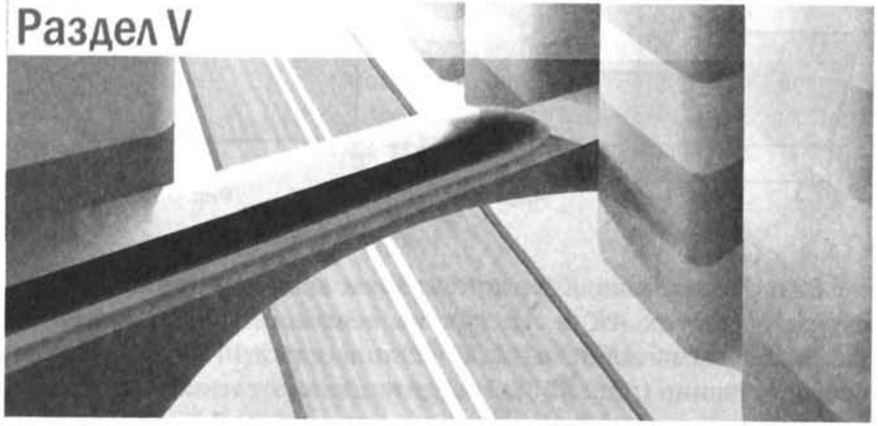
* * *

892. Можно ли разрезать квадрат на три друг другу подобных и неравных прямоугольника?

893. На промежутке [0; 1] выбираются числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2008}$. Определите наибольшее возможное значение выражения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2008} - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{2007}x_{2008} - x_{2008}x_1.$$

894. Некоторые выпуклые n-угольники можно разрезать на квадраты и правильные треугольники (рис. 354). Найдите все значения переменной n.



Раздел V

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

18. Перпендикулярность прямой и плоскости

Напомним, что *перпендикулярными* называют прямые, угол между которыми равен 90°. Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и могут быть скрещивающимися. На рисунке 355 перпендикулярные прямые a и p пересекаются, а перпендикулярные прямые a и q скрещиваются.

Прямая называется **перпендикулярной плоскости**, если она перпендикулярна любой прямой этой плоскости.

Перпендикулярность прямой a плоскости α записывают так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что и плоскость α перпендикулярна прямой a, и пишут $\alpha \perp a$.

Если прямая l лежит в плоскости β или параллельна ей, то в плоскости β есть прямые, параллельные прямой l. Поэтому прямая, перпендикулярная плоскости, обязательно эту плоскость пересекает.

Окружающее пространство дает много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Столбы с осветительными лампами и колонны устанавливают перпендикулярно горизонтальной поверхности земли (рис. 356, 357).

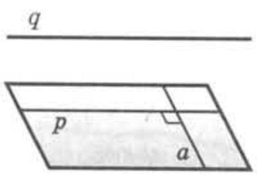


Рис. 355

Из теоремы **6** параграфа **9** следует, что при отыскании угла между прямыми, их можно заменять параллельными прямыми. Поэтому если одна из параллельных


Рис. 356

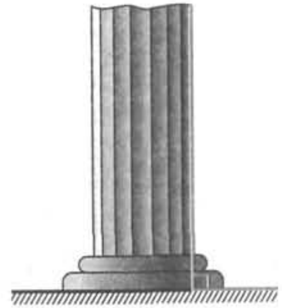


Рис. 357

прямых перпендикулярна плоскости, то и другая также перпендикулярна этой плоскости. Верно и обратное утверждение.

Теорема 1. ***Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны друг другу.***

Доказательство. Пусть прямые x и y обе перпендикулярны плоскости α (рис. 358). Докажем, что прямые x и y параллельны друг другу.

Через какую-либо точку M прямой x проведем прямую x_1, параллельную прямой y. Тогда $x_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая x_1 совпадает с прямой x. Допустим, что это не так. Тогда получается, что в плоскости β, заданной прямыми x и x_1, через точку M проведены две прямые, перпендикулярные прямой a, по которой пересекаются плоскости α и β, что невозможно. Значит, прямые x и y параллельны.

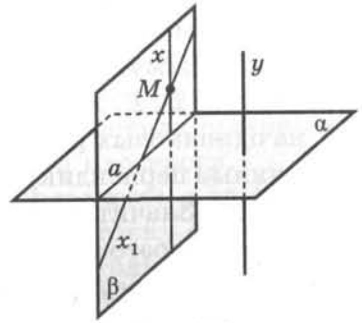


Рис. 358

Установим *признак перпендикулярности прямой и плоскости.*

Теорема 2. ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.***

Доказательство. Пусть прямая p пересекает плоскость α в точке O и перпендикулярна пересекающимся прямым a и b, лежащим в плоскости α (рис. 359). Докажем,

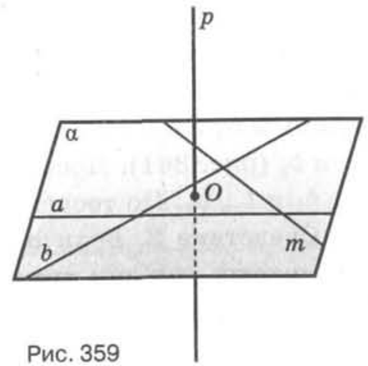


Рис. 359

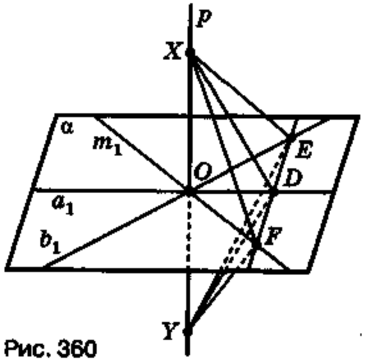


Рис. 360

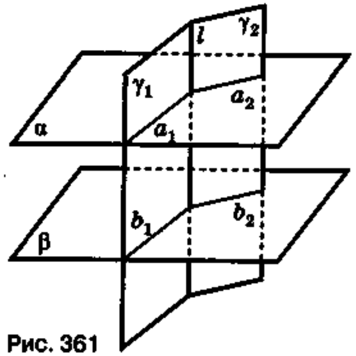


Рис. 361

что прямая p перпендикулярна плоскости α, т. е. что прямая p перпендикулярна прямой m, произвольно выбранной в плоскости α.

Проведем через точку O прямые a_1, b_1 и m_1, соответственно параллельные прямым a, b и m. В плоскости α проведем какую-либо прямую так, чтобы она пересекала прямые a_1, b_1 и m_1 в точках D, E, F (рис. 360). На прямой p отметим точки X и Y на одинаковых расстояниях от точки O. Прямые a_1 и b_1 — серединные перпендикуляры к отрезку XY, поэтому $DX = DY$ и $EX = EY$. Значит, треугольники XDE и YDE равны по трем сторонам, а поэтому углы XEF и YEF равны. Учитывая это, получим, что треугольники XEF и YEF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $FX = FY$. Это означает, что треугольник XFY является равнобедренным, а поэтому его медиана FO является и высотой, т. е. прямые p и m_1, а значит, и прямые p и m перпендикулярны.

Следствие 1. ***Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.***

Для доказательства проведем через прямую l две каких-либо плоскости γ_1 и γ_2. Пусть они пересекают плоскость α по прямым a_1 и a_2, а параллельную ей плоскость β — по прямым b_1 и b_2 (рис. 361). Поскольку $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$, $l \perp a_1$ и $l \perp a_2$, то $l \perp b_1$ и $l \perp b_2$. По теореме 2 получаем, что $l \perp \beta$.

Следствие 2. ***Если одной прямой перпендикулярны две плоскости, то они параллельны.***

Проведите самостоятельно обоснование этого утверждения, используя рисунок 361.

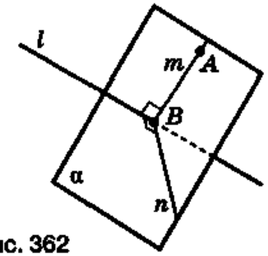


Рис. 362

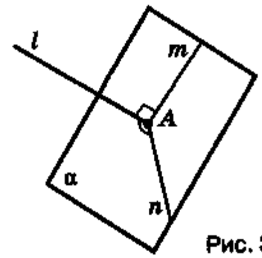


Рис. 363

Теорема 3. ***Через каждую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.***

Доказательство. Пусть даны прямая l и точка A. В случае, когда точка A не лежит на прямой l (рис. 362), через точку A проведем прямую m, перпендикулярную прямой l, и через точку B пересечения прямых m и l — еще одну прямую n, перпендикулярную прямой l. В случае, когда точка A лежит на прямой l (рис. 363), через точку A проведем прямые m и n, перпендикулярные прямой l. Через прямые m и n проведем плоскость α. Эти плоскости и прямая l перпендикулярны по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Докажем теперь, что построенная плоскость α единственная. Допустим, что это не так. Пусть через точку A проведены две плоскости α_1 и α_2, перпендикулярные прямой l (рис. 364, 365). Через прямую l и точку A проведем какую-либо плоскость β. Она пересекает плоскости α_1 и α_2 по некоторым прямым p_1 и p_2, так как плоскость β имеет с плоскостями α_1 и α_2 общую точку A. Поскольку $l \perp \alpha_1$ и $l \perp \alpha_2$, то $l \perp p_1$ и $l \perp p_2$. Получается, что в плоскости β через точку A проведены две прямые p_1 и p_2, перпендикулярные прямой l, что невозможно.

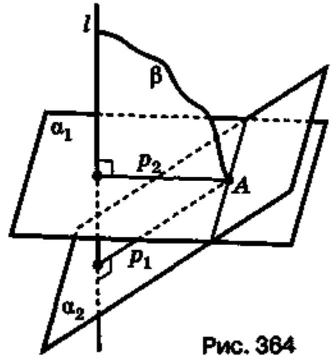


Рис. 364

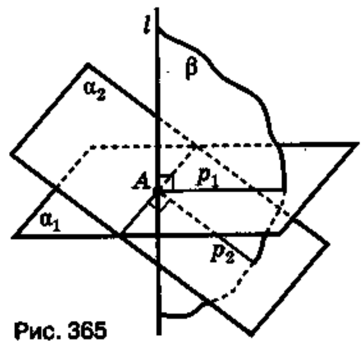


Рис. 365

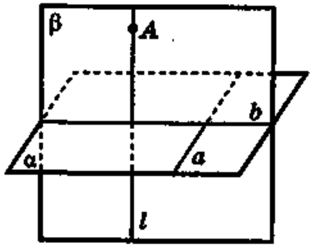


Рис. 366

Теорема 4. ***Через каждую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.***

Доказательство. Пусть даны точка A и плоскость α. Пусть a — прямая в плоскости α, β — плоскость, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой a. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой b (рис. 366). В плоскости β через точку A проведем прямую l, перпендикулярную прямой b. Прямая l — искомая, так как она перпендикулярна пересекающимся прямым a и b: $l \perp b$ по построению; $l \perp a$, так как $a \perp \beta$ и l принадлежит β.

Прямая l — единственная. Допустим, что это не так. Пусть через точку A проходит еще одна прямая l_1, перпендикулярная плоскости α (рис. 367, 368). Тогда по теореме 1 прямые l и l_1 параллельны друг другу. Но такое невозможно, так как прямые l и l_1 пересекаются в точке A.

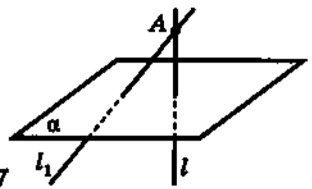


Рис. 367

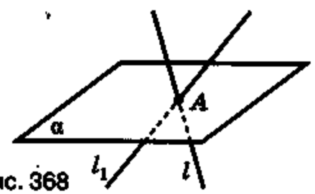


Рис. 368

Следствие 3. ***Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.***

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 369). Поскольку ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, то треугольник ACC_1 прямоугольный с прямым углом C. Поэтому $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. А поскольку треугольник ABC также прямоугольный с прямым углом B, то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Учитывая, что $CC_1 = AA_1$ и $BC = AD$, получаем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

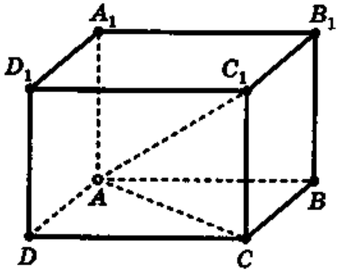


Рис. 369

?

1. Какие прямые пространства называются перпендикулярными? Могут ли скрещивающиеся прямые быть перпендикулярными?
2. Какую прямую называют перпендикулярной плоскости?
3. Сформулируйте свойство прямых, перпендикулярных одной плоскости.
4. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Сформулируйте свойство прямой, перпендикулярной одной из параллельных плоскостей.
6. Сформулируйте свойство плоскостей, перпендикулярных одной прямой.
7. Сформулируйте утверждение о плоскости, перпендикулярной данной прямой и проходящей через данную точку.
8. Сформулируйте утверждение о прямой, перпендикулярной данной плоскости и проходящей через данную точку.

895. Есть параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что:

а) если $\angle BAD = 90°$, то $CD \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$;
б) если $AB \perp DD_1$, то $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$.

896. Ребра BC и AD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярны. Докажите, что ребро AD перпендикулярно одной из средних линий грани ABC.

897. Укажите в своем классе модели прямых, перпендикулярных плоскости.

898. Определите, перпендикулярна ли прямая l плоскости α, учитывая, что на рисунке:

а) 370 параллельные прямые a и b лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;
б) 371 пересекающиеся прямые c и d лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;
в) 372 пересекающиеся прямые m и n лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;
г) 373 прямая r перпендикулярна пересекающимся прямым p и q плоскости α_2 и прямая l параллельна прямой r.

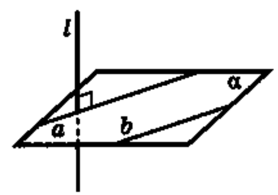


Рис. 370

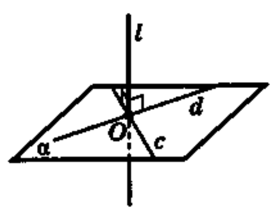


Рис. 371

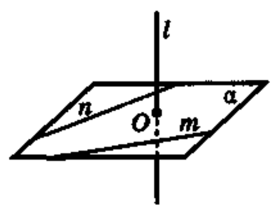


Рис. 372

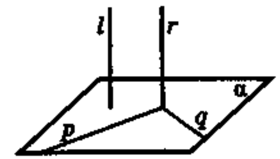


Рис. 373

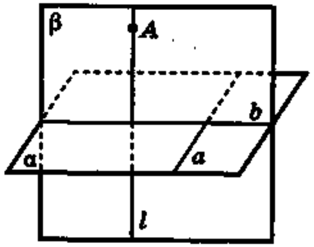


Рис. 366

Теорема 4. ***Через каждую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.***

Доказательство. Пусть даны точка A и плоскость α. Пусть a — прямая в плоскости α, β — плоскость, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой a. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой b (рис. 366). В плоскости β через точку A проведем прямую l, перпендикулярную прямой b. Прямая l — искомая, так как она перпендикулярна пересекающимся прямым a и b: $l \perp b$ по построению; $l \perp a$, так как $a \perp \beta$ и l принадлежит β.

Прямая l — единственная. Допустим, что это не так. Пусть через точку A проходит еще одна прямая l_1, перпендикулярная плоскости α (рис. 367, 368). Тогда по теореме 1 прямые l и l_1 параллельны друг другу. Но такое невозможно, так как прямые l и l_1 пересекаются в точке A.

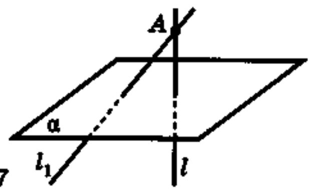


Рис. 367

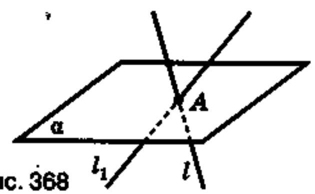


Рис. 368

Следствие 3. ***Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.***

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 369). Поскольку ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, то треугольник ACC_1 прямоугольный с прямым углом C. Поэтому $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. А поскольку треугольник ABC также прямоугольный с прямым углом B, то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Учитывая, что $CC_1 = AA_1$ и $BC = AD$, получаем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

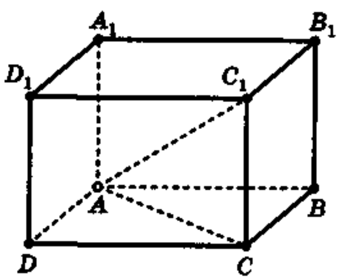


Рис. 369

? 1. Какие прямые пространства называются перпендикулярными? Могут ли скрещивающиеся прямые быть перпендикулярными?
2. Какую прямую называют перпендикулярной плоскости?
3. Сформулируйте свойство прямых, перпендикулярных одной плоскости.
4. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Сформулируйте свойство прямой, перпендикулярной одной из параллельных плоскостей.
6. Сформулируйте свойство плоскостей, перпендикулярных одной прямой.
7. Сформулируйте утверждение о плоскости, перпендикулярной данной прямой и проходящей через данную точку.
8. Сформулируйте утверждение о прямой, перпендикулярной данной плоскости и проходящей через данную точку.

895. Есть параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что:

а) если $\angle BAD = 90°$, то $CD \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$;
б) если $AB \perp DD_1$, то $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$.

896. Ребра BC и AD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярны. Докажите, что ребро AD перпендикулярно одной из средних линий грани ABC.

897. Укажите в своем классе модели прямых, перпендикулярных плоскости.

898. Определите, перпендикулярна ли прямая l плоскости α, учитывая, что на рисунке:

а) 370 параллельные прямые a и b лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;
б) 371 пересекающиеся прямые c и d лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;
в) 372 пересекающиеся прямые m и n лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;
г) 373 прямая r перпендикулярна пересекающимся прямым p и q плоскости α_2 и прямая l параллельна прямой r.

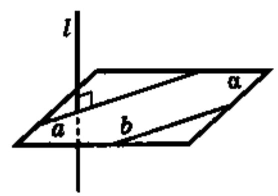


Рис. 370

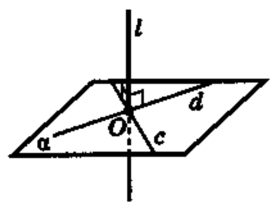


Рис. 371

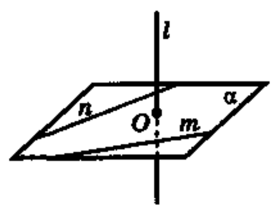


Рис. 372

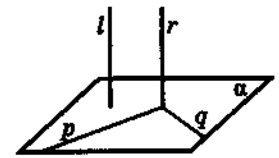


Рис. 373

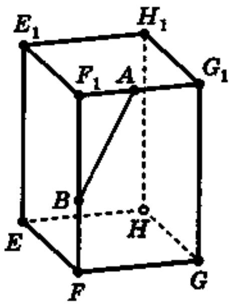


Рис. 374

899. На ребрах F_1G_1 и FF_1 прямоугольного параллелепипеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$ выбраны соответственно точки A и B (рис. 374). Определите, перпендикулярны ли:

а) прямая FG и плоскость EE_1F_1;
б) прямые AB и GH;
в) прямые F_1G и EF.

900. Точки L, M и O лежат на прямой, перпендикулярной плоскости γ, а точки O, B, C и D лежат в этой плоскости. Определите, является ли прямым угол:

а) LOB; б) MOC; в) DLM; г) DOL; д) BMO.

901. Прямая FA перпендикулярна плоскости BCF, и точка F — середина отрезка AD. Докажите, что:

а) $AB = DB$;
б) если $BF = FC$, то $AB = AC$;
в) если $AB = DC$, то $BF = FC$.

902. Через центр O симметрии квадрата со стороной a проведена прямая l, перпендикулярная плоскости квадрата. Найдите расстояние от вершин квадрата до точки K прямой l, учитывая, что $OK = d$.

903. Через вершину C правильного треугольника ABC со стороной $16\sqrt{3}$ см проведена прямая k, перпендикулярная плоскости ABC, а через ортоцентр O этого треугольника — прямая l, параллельная прямой k. На прямых k и l выбраны точки D и E, отстоящие от точек C и O на 16 см и 12 см соответственно. Найдите расстояние DE и расстояния от точек D и E до вершин треугольника.

904. Через концы P и Q отрезка PQ, параллельного плоскости γ, проведены прямые, перпендикулярные этой плоскости и пересекающие ее в точках P_1 и Q_1. Докажите, что $PQ = P_1Q_1$.

905. Углы A и B треугольника ABC вместе составляют 90°, а прямая BD перпендикулярна плоскости ABC. Докажите, что прямые CD и AC перпендикулярны.

906. Прямая AM перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что прямая BD перпендикулярна:

а) плоскости AMO; б) прямой MO.

907. Через центр O симметрии параллелограмма $ABCD$ проведена такая прямая l, что для ее точки M, отличной от O, истинны равенства $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна плоскости параллелограмма.

908. Как проверить перпендикулярность прямой и плоскости, если измерять можно только расстояния?

909. Два равных круга имеют единственную общую точку A, через которую проходят диаметры AB и AC этих кругов, причем эти диаметры не лежат на одной прямой. Определите, перпендикулярна ли плоскости ABC линия пересечения плоскостей, в которых лежат данные круги. Изменится ли вывод, если круги не будут равными?

910. На ребре HE четырехугольной пирамиды $REFGH$, у которой боковое ребро FR перпендикулярно плоскости основания, выбрана точка A и на отрезках AF и AR отмечены их середины B и C. Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости основания $EFGH$, и найдите угол между прямыми BC и GH.

911. Ребра AB и AC, а также DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ равны, а точка M — середина ребра BC. Докажите, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна прямой BC.

912. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку M прямой a и перпендикулярные ей, лежат в плоскости, которая перпендикулярна прямой a и проходит через точку M.

913. Докажите, что если точка X равноудалена от концов данного отрезка AB, то он лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной прямой AB.

914. Через концы M и N отрезка, пересекающего плоскость γ в точке A, проведены прямые m и n. Эти прямые перпендикулярны плоскости γ и пересекают ее в точках M_1 и N_1

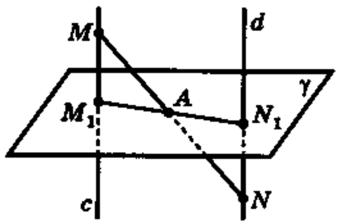


Рис. 375

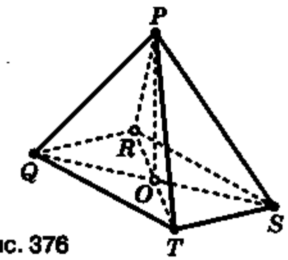


Рис. 376

соответственно (рис. 375). Докажите, что точки M_1, N_1 и A лежат на одной прямой, и найдите отрезок MN, учитывая, что $MM_1 = 24$ см, $NN_1 = 8$ см, $AN_1 = 6$ см.

915. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие ее в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, учитывая, что $AC = 9$ м, $BD = 6$ м , $CD = 7{,}2$ м и отрезок AB не пересекает плоскость α.

916. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие ее в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите A_1B_1, учитывая, что $AB = 30$ см, $AA_1 = 43$ см, $BB_1 = 67$ см.

917. В каком случае через одну из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, перпендикулярную другой прямой?

918. Ребра PQ и PS, а также PR и PT четырехугольной пирамиды $PQRST$, основанием которой является параллелограмм, равны друг другу (рис. 376). Докажите, что отрезок, соединяющий вершину P с центром O симметрии параллелограмма, перпендикулярен основанию $QRST$.

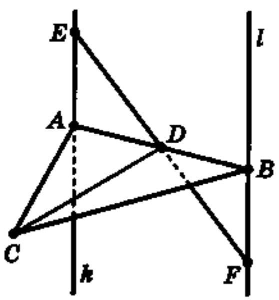


Рис. 377

919. Через вершины A и B треугольника ABC проведены прямые k и l, перпендикулярные его плоскости, а через медиану CD — плоскость, пересекающая прямые k и l в точках E и F соответственно (рис. 377). Установите:

а) чем является отрезок CD в треугольнике CEF;
б) что если $CA = CB$, то треугольник CEF является равнобедренным.

920. На прямой, перпендикулярной плоскости треугольника PQR и проходящей через вершину P, выбрана точка A. На отрезке, соединяющем середину стороны QR с точкой A, отмечена такая точка T, что $AT : TP_1 = 2 : 1$. Найдите угол между прямыми:

а) GT и QR, учитывая, что G — центр тяжести треугольника PQR;
б) GT и PQ.

921. Концы A и B отрезков AA_1 и BB_1 принадлежат плоскости α, а сами отрезки ей перпендикулярны и расположены по одну сторону от плоскости. Найдите углы четырехугольника AA_1B_1B, учитывая, что:

а) $AA_1 = BB_1$;   б) $A_1B_1 = 2AB$;   в) $A_1B_1 : AB = 3 : 2$.

922. Точки A, B, C, D являются серединами ребер TZ, XY, YZ, Y_1Z_1 прямоугольного параллелепипеда $TXYZT_1X_1Y_1Z_1$, в основании которого лежит квадрат (рис. 378). Определите:

а) перпендикулярна ли прямая YA плоскости сечения XX_1DC;
б) перпендикулярна ли прямая TB плоскости XX_1D;
в) угол между прямыми AY и XD.

923. Все грани треугольной пирамиды $IJKL$ — правильные треугольники со стороной 6 см. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра MN и перпендикулярной ему, и найдите площадь этого сечения.

924. Есть треугольная пирамида $SABC$, все ребра которой равны друг другу. На ребрах SC, SB, CB отмечены середины U, V, Y, а на ребре SA — произвольная точка X (рис. 379). Определите:

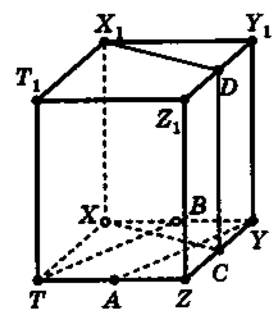


Рис. 378

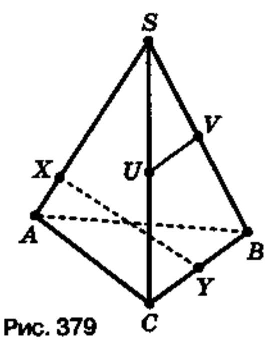


Рис. 379

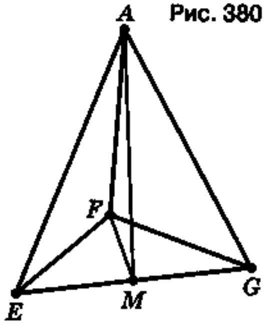


Рис. 380

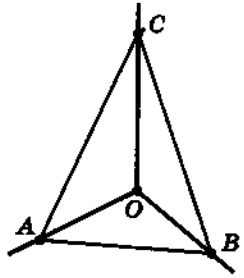


Рис. 381

а) перпендикулярны ли прямые SA и UV;
б) перпендикулярны ли прямые UV и YX;
в) угол между прямыми UV и AY.

925. Есть прямоугольный треугольник EFG с прямым углом F и катетами FE и FG, соответственно равными 6 см и 8 см. От вершины F на луче, перпендикулярном плоскости треугольника, отложен отрезок FA, равный 12 см, а на гипотенузе EG отмечена ее середина M (рис. 380). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AFM.

926. На рисунке 381 прямые OA, OB и OC попарно перпендикулярны. Найдите отрезок BC, учитывая, что:

а) $OA = 6$ см, $AB = 14$ см, $OC = 3$ см;
б) $AC = 18$ см, $AB = 32$ см, $OC = 10$ см;
в) $OA = p$, $AB = q$, $OC = r$;
г) $AC = k$, $AB = l$, $OC = m$.

927. Основанием прямоугольного параллелепипеда является прямоугольник с измерениями 9 см и 12 см, а диагональ параллелепипеда равна $15\sqrt{2}$ см. Найдите третье измерение параллелепипеда.

928. Точка Q — середина ребра KK_1 прямоугольного параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, точка H ребра MM_1 такова, что $MH : HM_1 = 4 : 1$. Найдите длину отрезка HQ, учитывая, что диагональ параллелепипеда равна 41 см, а диагональ его основания — 9 см.

929. Из вершины B треугольника ABC проведен отрезок BD, перпендикулярный плоскости треугольника. Найдите длину этого отрезка, учитывая, что $DA = 13$ см, $DC = 15$ см, а сторона BC длиннее стороны BA на 4 см.

930. На прямой, перпендикулярной плоскости α и пересекающей ее в точке O, выбраны две точки A и B, а на плоскости α — такая точка X, что $XA = 3$, $XB = 4$. Найдите XO, учитывая, что:

а) $AB = 5$; б) $AB = 6$; в) $AB = 7$.

931. Боковое ребро OY треугольной пирамиды $OXYZ$ перпендикулярно плоскости ее основания XYZ. Найдите это ребро, учитывая, что ребра YX и YZ соответственно равны 27 см и 48 см и ребра OZ и OX относятся как $4 : 3$.

932. Есть прямоугольный параллелепипед $CDEFC_1D_1E_1F_1$, грань $CDEF$ которого является квадратом. Найдите площадь боковой поверхности четырехугольной пирамиды C_1CDEF, учитывая, что $CD = 20$ мм, $CE_1 = 20\sqrt{6}$ мм.

933. Основанием треугольной пирамиды $SXYZ$ является правильный треугольник, а ребра SZ, SX, SY взаимно перпендикулярны. Через точку Q, выбранную на ребре XZ, проведена плоскость, перпендикулярная прямой SZ. Найдите ребро SX пирамиды, учитывая, что площадь сечения равна 32 см^2, а $SQ = 17$ см.

934. Измерения AB, AD и диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно равны 6, 12 и 18. Точки K и K_1 выбраны на ребрах AD и A_1D_1 так, что $AK : KD = A_1K_1 : K_1D_1 = 1 : 5$. Докажите, что плоскость BKK_1 перпендикулярна прямой AC, и найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью BKK_1.

935. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 12 см, 16 см и 28 см. Определите площадь сечения, проведенного через концы трех ребер, выходящих из одной вершины.

936. Есть треугольная пирамида $QABC$, основание которой — правильный треугольник ABC, а боковые ребра QA, QB, QC равны друг другу. Из вершины C и из такой точки X ребра AC, что $AX = 45$ см и $XC = 30$ см, проведены перпендикуляры к грани SAB. Найдите длины этих перпендикуляров, учитывая, что расстояние между их основаниями равно 18 см.

937. Есть правильная треугольная призма $MNKM_1N_1K_1$. Точки A и B — середины ребер MK и KK_1 соответственно. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные гра-

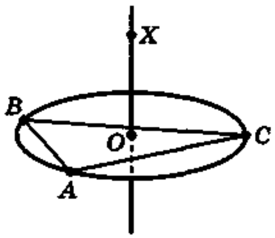


Рис. 382

ни MM_1N_1N и пересекающие ее в точках P и Q соответственно. Найдите сторону основания и боковое ребро призмы, учитывая, что $AB = 2\sqrt{61}$ см, а $PQ = 13$ см.

938. В треугольной пирамиде $QFGH$ основание FGH — правильный треугольник, а боковые ребра QF, QG, QH равны друг другу. Одно сечение пирамиды перпендикулярно ребру QH и проходит через вершину F, другое — параллельно ребру QH и содержит вершину G и такую точку B ребра FH, что $FB = 8$ см и $BH = 7$ см. Найдите отрезок, по которому пересекаются эти сечения, учитывая, что $QF = 12$ см.

939. Через центр O описанной около треугольника ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника (рис. 382). Докажите, что каждая точка X этой прямой равноудалена от вершин треугольника.

940. Точка Q является центром квадратного основания $ABCD$, а точка K — серединой ребра PA четырехугольной пирамиды $PABCD$, все ребра которой равны 100. Начертите сечение пирамиды и найдите его площадь, учитывая, что плоскость сечения проходит через точку K и перпендикулярна прямой:

а) AC; б) PA; в) PQ; г) BD.

941. Есть треугольная пирамида $PABC$, все ребра которой равны друг другу. В ней отмечены центр Q ее основания ABC и внутренняя точка K ребра PB. Сделайте соответствующий рисунок в тетради и начертите сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и перпендикулярной прямой:

а) BC; б) BP; в) BQ.

942. Точка K — середина ребра A_1B_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Начертите сечение куба и найдите его периметр и площадь, учитывая, что плоскость проходит через точку K и перпендикулярна прямой:

а) DD_1; б) CD; в) C_1D; г) CD_1; д) BD.

943. Найдите производную функции:

а) $y = (2t+1)^3 + 5(3t-7)^2$; д) $y = \frac{(x-1)^2}{(x+3)^3}$;

б) $y = (t-1)^4(t+1)^3$; е) $y = \frac{1}{\sqrt{1-k}}$;

в) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; ж) $y = \sqrt{t+2} - \sqrt{t-2}$;

г) $y = \frac{2}{(x+1)^2+1}$; з) $y = \sqrt[4]{(k-8)^7}$.

944. Методом интервалов решите неравенство:

а) $(b^2-1)(b^3-1)(b^4-1) \geqslant 0$; в) $\frac{1}{b-1} \geqslant \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1}$;

б) $\frac{(b-3)^3(b+4)^4(b-7)}{(b-2)^2(b+1)} \leqslant 0$; г) $\sqrt{b^2-4}\,(b-3) < 0$.

945. Решите неравенство $f'(x) \leqslant g'(x)$, учитывая, что:

а) $f(x) = -x^3 + 3x - 1$, $g(x) = 2 - 6x + 3x^2$;

б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x - 1$, $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 5$.

946. Докажите, что:

а) функция $y = x^5 + 6x^3$ возрастает на всей координатной прямой;

б) функция $y = \frac{4}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

947. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 1$; в) $y = 3x - x^3$;

б) $y = x^3 - 12x$; г) $y = (x-1)^3 - 3(x-1)$.

948. Докажите, что при $x \geqslant 0$ истинно равенство $\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \geqslant \frac{x^4}{2}$.

949. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой a, учитывая, что:

а) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $a = 1$; б) $f(x) = -2x^3$, $a = 2$.

950. Есть график функции $y = x^4 - x$. Найдите уравнение касательной к этому графику:

а) в точке $x = 2$;

б) в точке его пересечения с осью ординат;

в) в точке его пересечения с осью абсцисс.

9 — 2149

951. В сплав меди и цинка, содержащий 22 кг меди, добавили 15 кг цинка, после чего содержание цинка в сплаве увеличилось на 33 процентных пункта. Определите первоначальную массу сплава.

952. После того как сплавили два слитка меди, содержавших 6 кг и 12 кг меди, получили сплав с 36-процентным содержанием меди. Каким было процентное содержание меди в обоих слитках, если в первом оно было ниже на 40 процентных пунктов?

* * *

953. Решите уравнение

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3.$$

954. На продолжении биссектрисы угла BAC за вершину выбрана такая точка D, что $\angle BDC = 0{,}5 \angle BAC$. Найдите отрезок AD, учитывая, что $AB = b$ и $AC = c$.

955. Докажите, что если положительные числа b и c удовлетворяют неравенству $b(1-c) > \frac{1}{4}$, то $b > c$.

19. Расстояния. Угол между прямой и плоскостью

Пусть даны плоскость α и точка M вне ее (рис. 383). Через точку M проведем прямую l, перпендикулярную плоскости α, и пусть A — точка пересечения прямой l с плоскостью α. Отрезок MA называется *перпендикуляром к плоскости*, проведенным из точки M, а точка A — *основанием перпендикуляра*.

Соединим точку M еще с какой-либо точкой B плоскости α. Отрезок MB называется *наклонной к плоскости*, проведенной из точки M, а точка B — *основанием наклонной*. Отрезок AB называется *проекцией наклонной* на плоскость α.

Теорема 5. ***Перпендикуляр к плоскости, проведенный из некоторой точки, меньше любой наклонной к этой плоскости, проведенной из той же точки.***

Доказательство. Пусть отрезок AB на рисунке 384 — перпендикуляр, а отрезок AC — наклонная к плоскости α. Эти

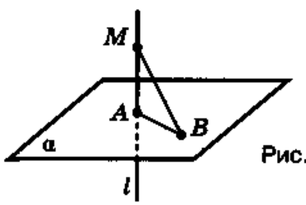
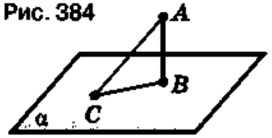


Рис. 383

Рис. 384



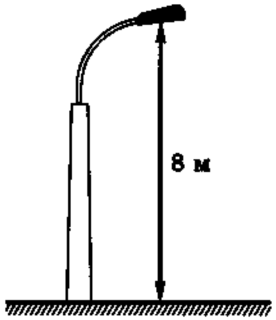


Рис. 385

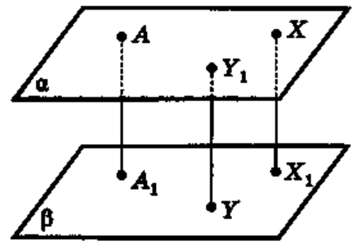


Рис. 386

перпендикуляр и наклонная в прямоугольном треугольнике ABC являются соответственно катетом и гипотенузой. Поэтому $AB < AC$.

В соответствии с утверждением теоремы 5 из всех расстояний от данной точки до различных точек данной плоскости наименьшим является расстояние, измеренное по перпендикуляру.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости.

Когда мы говорим, например, что уличный фонарь находится на высоте 8 м от земли, то подразумеваем, что расстояние от фонаря до поверхности земли, измеренное по перпендикуляру, проведенному от фонаря до плоскости земли, составляет 8 м (рис. 385).

Теорема 6. ***Расстояние от любой точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости одно и то же и равно длине их общего перпендикуляра.***

Доказательство. Пусть даны параллельные плоскости α и β (рис. 386). Пусть A — какая-либо точка плоскости α, отрезок AA_1 — перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости β. Возьмем произвольную точку X плоскости α и проведем из нее перпендикуляр XX_1 к плоскости β. Тогда по теореме 1 прямые AA_1 и XX_1 параллельны, а по теореме 11 из параграфа 11 отрезки AA_1 и XX_1 равны друг другу. Это означает, что расстояние от любой точки X плоскости α до плоскости β равно отрезку AA_1. Поскольку отрезок AA_1 перпендикулярен и плоскости β, то он представляет и расстояние от точки A_1 до плоскости α. Понятно, что расстояние от любой точки Y плоскости β до плоскости α равно отрезку AA_1.

Расстоянием между параллельными плоскостями называется длина перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки одной плоскости к другой плоскости.

Рис. 387

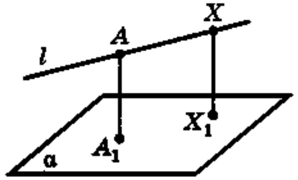


Рис. 388

Все точки одной стены комнаты находятся на одном и том же расстоянии от противоположной стены (рис. 387). Это расстояние и есть ширина комнаты.

Теорема 7. ***Расстояние от любой точки прямой, параллельной плоскости, до этой плоскости одно и то же и равно перпендикуляру, проведенному из какой-либо точки прямой к плоскости.***

Используя рисунок 388, проведите доказательство теоремы самостоятельно.

Расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью называется длина перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки прямой к плоскости.

Все точки края стола находятся на одном расстоянии от пола (рис. 389). Это расстояние и есть высота стола.

Теорема 8. ***Две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр.***

▶ **Доказательство.** Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 390). Докажем, что на этих прямых можно выбрать такие точки A и B, что прямая AB перпендикулярна и прямой a, и прямой b.

Пусть α — плоскость, проходящая через прямую b параллельно прямой a. Возьмем на прямой a точку X и опустим перпендикуляр XY на плоскость α. Пусть β — плоскость,

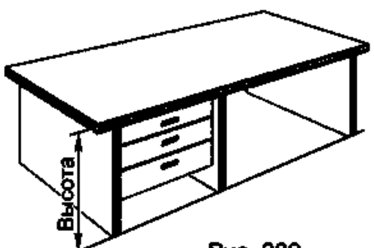
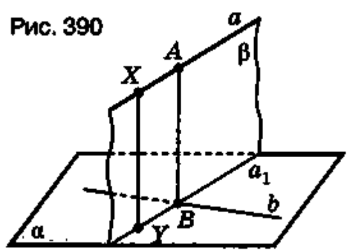


Рис. 389

Рис. 390



проходящая через пересекающиеся прямые a и XY. Обозначим a_1 прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. Поскольку $a_1 \parallel a$, то прямые a_1 и b пересекаются в некоторой точке B. В плоскости β опустим перпендикуляр BA на прямую a. Прямые AB и XY лежат в одной плоскости β и перпендикулярны прямой a. Поэтому $AB \parallel XY$ и $AB \perp \alpha$ и, значит, $AB \perp a$ и $AB \perp b$.

Этим самым существование общего перпендикуляра скрещивающихся прямых обосновано. Докажем теперь его единственность.

Пусть скрещивающиеся прямые a и b имеют еще один общий перпендикуляр A_1B_1, причем точка A_1 принадлежит прямой a, а точка B_1 — прямой b (рис. 391).

Точки A и A_1, B и B_1 совпадать не могут, так как из одной точки к прямой можно провести только один перпендикуляр. Поскольку $A_1B_1 \perp a$ и $A_1B_1 \perp b$, то прямая A_1B_1, как и прямая AB, перпендикулярна плоскости α, проходящей через прямую b параллельно прямой a. Поэтому $A_1B_1 \parallel AB$ и точки A_1, B_1, A, B принадлежат одной плоскости. Значит, и прямые AA_1 и BB_1 принадлежат одной плоскости. Получили противоречие с тем, что эти прямые скрещиваются. ◀

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Из доказательства теоремы 8 следует, что *расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из них до плоскости, содержащей другую прямую и прямую, параллельную первой.*

▶ **Пример 1.** В четырехугольной пирамиде $QABCD$ все ребра равны a. Найдем расстояние между скрещивающимися ребрами AB и QC (рис. 392).

Из теоремы 8 следует, что на прямых AB и QC есть такие точки X и Y, что прямая XY перпендикулярна как прямой

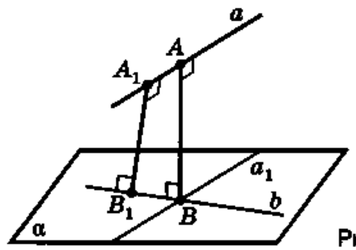
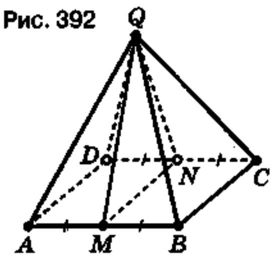


Рис. 391

Рис. 392



AB, так и прямой QC, и вместе с этим плоскости, проходящей через одну из этих прямых параллельно другой.

Пусть α — плоскость, проходящая через точку Q перпендикулярно прямой AB. Она проходит через середины M и N ребер AB и CD. Тогда $XY \parallel \alpha$, и проекцией отрезка XY на плоскость α будет отрезок, равный XY. Определим, в какие точки спроектируются точки X и Y. Поскольку $AB \perp \alpha$, то вся прямая AB проектируется в одну точку M. Значит, точка X проектируется в точку M. Поскольку точки Q и C проектируются в точки Q и N соответственно, то прямая QC проектируется в прямую QN. Учтем теперь, что прямая QN принадлежит плоскости, параллельной AB. Поэтому искомая проекция отрезка XY есть перпендикуляр к QN, проведенный из точки M. Длину d этого перпендикуляра найдем, используя площадь равнобедренного треугольника QMN с основанием a и боковыми сторонами $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Получим $\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot d$, откуда $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. ◀

Теперь мы можем точно описать взаимное расположение двух прямых в пространстве с помощью чисел. Если прямые a и b пересекаются, то их взаимное расположение характеризует угол α между ними (рис. 393). Если прямые a и b параллельны, то их взаимное расположение характеризует расстояние d между ними (рис. 394). Если прямые a и b скрещиваются, то их взаимное расположение характеризует угол α и расстояние d между ними (рис. 395).

Теорема 9. ***Если прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной, а если прямая плоскости перпендикулярна наклонной к плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной.***

Доказательство. Пусть отрезки AB и AC — соответственно перпендикуляр и наклонная к плоскости α, тогда отрезок BC — проекция наклонной AC на эту плоскость (рис. 396).

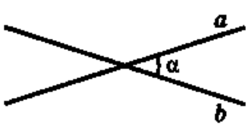


Рис. 393

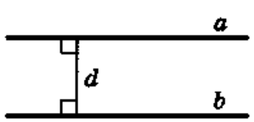


Рис. 394

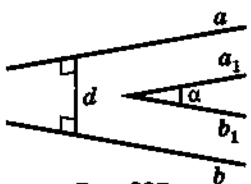


Рис. 395

Рис. 396

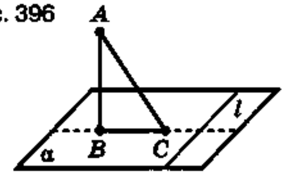
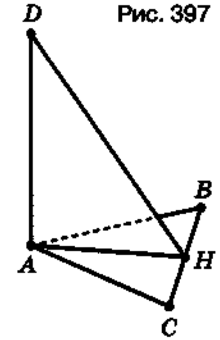


Рис. 397



Пусть прямая l плоскости α перпендикулярна проекции BC. Докажем, что прямая l перпендикулярна самой наклонной AC.

Прямая l перпендикулярна пересекающимся прямым BC и AB плоскости ABC — первой прямой по условию, а второй потому, что она лежит в плоскости α, которой перпендикулярна прямая AB. Поэтому прямая l перпендикулярна и прямой BC плоскости ABC.

Пусть прямая l плоскости α перпендикулярна наклонной AC. Докажем, что прямая l перпендикулярна проекции BC этой наклонной.

Прямая l перпендикулярна пересекающимся прямым AC и AB плоскости ABC. Поэтому она перпендикулярна и прямой AC плоскости ABC.

Теорема 9 называется *теоремой о трех перпендикулярах* из-за того, что в ней говорится об отношении перпендикулярности между тремя прямыми. Приведем примеры использования этой теоремы.

Пример 2. Из вершины A к плоскости треугольника ABC, стороны которого AB, BC, CA соответственно равны 13, 20, 11, возведен перпендикуляр AD длиной 36 (рис. 397). Найдем расстояние от точки D до прямой BC.

Искомое расстояние есть длина перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую BC. Проведение этого перпендикуляра требует найти его основание на прямой BC. Для этого в плоскости треугольника ABC построим высоту AH этого треугольника. Поскольку прямая BC перпендикулярна высоте AH, являющейся проекцией наклонной DH, то по теореме о трех перпендикулярах прямая BC перпендикулярна наклонной DH, т. е. отрезок DH выражает искомое расстояние. Чтобы его вычислить, найдем сначала высоту AH треугольника ABC. По формуле Герона определим площадь S этого треугольника, что позволит найти и его высоту AH:

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(20 + 11 + 13) = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \sqrt{22(22-20)(22-11)(22-13)} = 66;$$
$$AH = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6{,}6.$$

Теперь, учитывая, что треугольник DAH — прямоугольный с прямым углом A, по теореме Пифагора найдем DH:
$$DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{36^2 + 6{,}6^2} = 36{,}6.$$

Пример 3. Докажем, что если данная точка пространства равноудалена от сторон многоугольника, то в этот многоугольник можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника.

Пусть точка S равноудалена от сторон A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ и SO — перпендикуляр из точки S на плоскость этого многоугольника. Тогда перпендикуляры SK_1, SK_2, ..., SK_{n-1}, SK_n, опущенные из точки O на стороны многоугольника, равны друг другу (рис. 398).

Соединим точку O с точками K_1, K_2, ..., K_{n-1}, K_n. Поскольку отрезки OK_1, OK_2, ..., OK_{n-1}, OK_n — проекции отрезков SK_1, SK_2, ..., SK_{n-1}, SK_n на плоскость многоугольника, стороны которого A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 соответственно перпендикулярны наклонным SK_1, SK_2, ..., SK_{n-1}, SK_n, то эти стороны и соответственно отрезки OK_1, OK_2, ..., OK_{n-1}, OK_n перпендикулярны. Значит, треугольники SOK_1, SOK_2, ..., SOK_{n-1}, SOK_n прямоугольные и все они имеют общий катет SO и равные гипотенузы. Поэтому эти треугольники равны, а значит, равны и отрезки OK_1, OK_2, ..., OK_{n-1}, OK_n, что означает равноудаленность точки O от сторон многоугольника. Значит, в этот многоугольник можно вписать окружность с центром O.

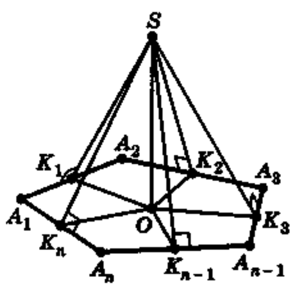


Рис. 398

Пример 4. Если данная точка пространства равноудалена от вершин многоугольника, то около этого многоугольника можно описать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника.

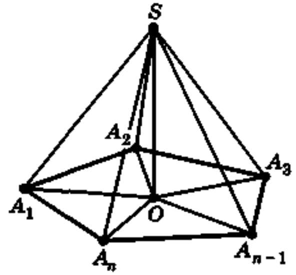


Рис. 399

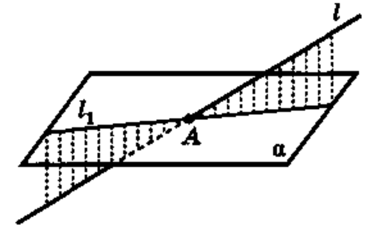


Рис. 400

Используя рисунок 399, проведите доказательство этого утверждения сами.

Теперь введем понятие угла между прямой и плоскостью. Пусть есть плоскость α и прямая l, ее пересекающая и неперпендикулярная α (рис. 400). Основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой l на плоскость α, образуют прямую l_1. Эта прямая называется *проекцией прямой* l на плоскость α.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и неперпендикулярной ей, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Угол между прямой и плоскостью — наименьший из углов, которые образует эта прямая со всеми прямыми плоскости.

Если прямая l перпендикулярна плоскости α, то ее проекцией на эту плоскость является точка A пересечения прямой с плоскостью (рис. 401). В этом случае прямая l образует со всеми прямыми плоскости углы, равные 90°. Этот угол и принимается в качестве угла между прямой и перпендикулярной ей плоскостью.

Если прямая l параллельна плоскости α, то ее проекцией на плоскость является прямая l_1, параллельная l. Угол между параллельными прямыми считается равным 0°. Поэтому угол между параллельными прямой и плоскостью принимается равным 0°.

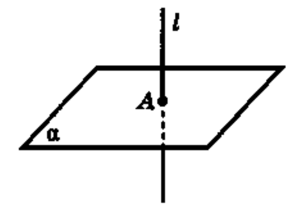


Рис. 401

?

1. Какой отрезок называется перпендикуляром к плоскости? Какая точка называется основанием перпендикуляра?
2. Какой отрезок называется наклонной к плоскости? Какая точка называется основанием наклонной?
3. Сформулируйте утверждение о сравнении длин перпендикуляра и наклонной к плоскости, проведенных из одной точки.

4. Что называется расстоянием от точки до плоскости?

5. Сформулируйте утверждение о расстоянии от любой точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости.

6. Что называется расстоянием между параллельными плоскостями?

7. Сформулируйте утверждение о расстоянии до плоскости от любой точки прямой, параллельной этой плоскости.

8. Что называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью?

9. Сформулируйте утверждение об общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых.

10. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?

11. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.

12. Каким отношением связаны многоугольник и точка, равноудаленная от сторон этого многоугольника?

13. Каким отношением связаны многоугольник и точка, равноудаленная от вершин этого многоугольника?

14. Что называется проекцией прямой на плоскость?

15. Что называется углом между прямой и плоскостью?

956. Укажите, в чем отличие:

а) перпендикуляра к плоскости и прямой, перпендикулярной плоскости;

б) наклонной к плоскости и прямой, пересекающей плоскость.

957. Докажите, что если из одной точки вне плоскости к ней проведены две наклонные, то:

а) наклонные, имеющие равные проекции, равны друг другу;

б) та наклонная больше, проекция которой больше;

в) равные наклонные имеют равные проекции;

г) большая наклонная имеет большую проекцию.

958. Из точки A к плоскости α проведены четыре равные наклонные AX, AY, AZ, AT. Докажите, что точки X, Y, Z, T принадлежат одной окружности, центром которой является проекция O точки A на плоскость α.

959. Из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен β. Найдите:

а) наклонную и ее проекцию на данную плоскость, если перпендикуляр равен d;

б) перпендикуляр и проекцию наклонной, если наклонная равна m.

960. Точка K принадлежит прямой p, проходящей через вершину A прямоугольника $ABCD$ и перпендикулярной его плоскости. Учитывая, что $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см, найдите расстояние:

а) от точки K до плоскости прямоугольника $ABCD$;

б) между прямыми AK и CD.

961. Из точки к плоскости проведены две наклонные длинами 10 см и 17 см, проекции которых отличаются на 9 см. Найдите эти проекции.

962. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, учитывая, что:

а) одна из них на 14 см больше другой, а проекции наклонных равны 16 см и 40 см;

б) наклонные относятся как 1 : 2, а проекции наклонных равны 10 см и 70 см.

963. Из точки к плоскости проведены две наклонные длиной 2 м каждая. Найдите расстояние от точки до плоскости, учитывая, что наклонные образуют угол в 60°, а их проекции перпендикулярны.

964. Длина перпендикуляра PQ из точки P к плоскости равна 1, а длины наклонных PA и PB к этой же плоскости равны 2. Точка C — середина отрезка AB. Найдите QC, учитывая, что:

а) $\angle APB = 90°$; б) $\angle APB = \beta$.

965. Из вершины B тупого угла параллелограмма $ABCD$ к его плоскости возведен перпендикуляр BH. Найдите стороны параллелограмма, учитывая, что $AH = 5$ см, $HD = HC = 8{,}5$ см, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ см.

966. Точка M отстоит на 40 см от каждой вершины правильного треугольника ABC со стороной 60 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC.

967. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рис. 402). Назовите отрезок, длина которого выражает расстояние между точкой P и прямой:

а) RS; в) RR_1;

б) P_1S_1; г) Q_1R_1.

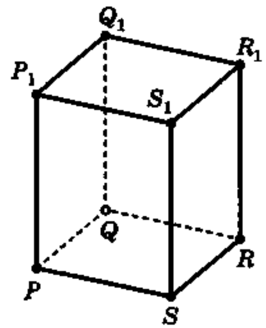


Рис. 402

968. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 402). Назовите отрезок, длина которого выражает расстояние между параллельными плоскостями:

а) $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$; в) PP_1S_1S и QQ_1R_1R.
б) PP_1Q_1Q и SS_1R_1R;

969. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 402). Назовите отрезок, длина которого выражает расстояние между параллельными прямой и плоскостью:

а) PQ и $P_1Q_1R_1S_1$; б) PQ_1 и SS_1R_1R; в) PR и $P_1Q_1R_1S_1$.

970. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 402). Назовите отрезок, длина которого выражает расстояние между скрещивающимися прямыми:

а) PQ и SS_1; б) PQ_1 и SS_1; в) PR и P_1S_1.

971. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 402). Назовите проекцию прямой:

а) PQ на плоскость SS_1R; г) PQ_1 на плоскость SS_1R_1;
б) PQ на плоскость QQ_1R_1; д) PR_1 на плоскость QRS;
в) PQ_1 на плоскость PQR; е) PR_1 на плоскость PQ_1Q.

972. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 402). Назовите угол между прямой:

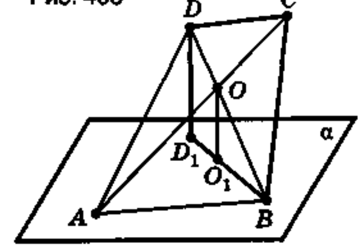
а) PQ и плоскостью SS_1R; г) PR_1 и плоскостью PQ_1Q;
б) PQ и плоскостью QQ_1R_1; д) PR_1 и плоскостью QRS;
в) PQ_1 и плоскостью PQR; е) PR_1 и плоскостью QRR_1.

973. Через вершину A треугольника ABC параллельно прямой BC проведена плоскость γ, и из точек B и C на плоскость γ опущены перпендикуляры BB_1 и CC_1. Найдите площадь треугольника ABC, учитывая, что $\angle B_1AC_1 = 90°$, $AB_1 = 12$ см, $AC = 25\sqrt{2}$ см, а расстояние между прямой BC и плоскостью γ равно 5 см.

974. Через одну из сторон ромба проведена плоскость, отстоящая от противоположной стороны ромба на 8 см. Найдите проекции сторон ромба на эту плоскость, учитывая, что проекции диагоналей на нее равны 16 см и 4 см.

975. Через основание AB трапеции $ABCD$ проведена плоскость α, отстоящая от другого основания на m (рис. 403). Найдите расстояние от точки O пересечения диагоналей трапеции до плоскости α, учитывая, что основания трапеции относятся как $p : q$.

Рис. 403



976. Концы отрезка длиной 100 см принадлежат параллельным плоскостям, расстояние между которыми равно 80 см. Найдите проекции отрезка на каждую плоскость.

977. Есть две параллельные плоскости. Из двух точек одной из них проведены наклонные ко второй плоскости длинами 37 см и 125 см, причем проекция первой наклонной на одну из плоскостей равна 12 см. Найдите проекцию второй наклонной.

978. В плоскости δ проведены две параллельные прямые MN и KL, отстоящие на a, а вне плоскости δ выбрана точка C, отстоящая от MN на b и от KL на c. Найдите расстояние от точки C до плоскости δ, учитывая, что:

а) $a = 66$, $b = c = 65$; б) $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.

979. Есть треугольная пирамида $PABC$, у которой $PA = PB = PC = 2$, $AC = 3$ и $AB = 2$. Начертите и найдите расстояние от вершины до основания пирамиды, учитывая, что ребро BC равно:

а) 2; б) 3; в) 4.

980. Из вершины B квадрата $ABCD$ к его плоскости возведен перпендикуляр QB. Найдите площадь треугольника QAD, учитывая, что $QB = 24$ см, $AB = 18$ см.

981. Укажите взаимное расположение прямых a и b на рисунке:

а) 404, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BF \perp ABC$;
б) 405, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BG \perp ABC$;
в) 406, учитывая, что $ABCD$ — ромб и $AE \perp ABC$;
г) 407, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BE \perp ABC$.

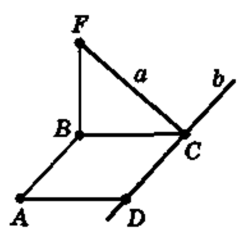


Рис. 404

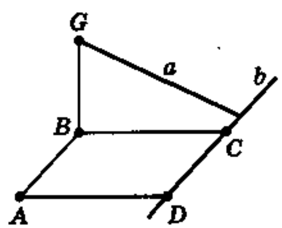


Рис. 405

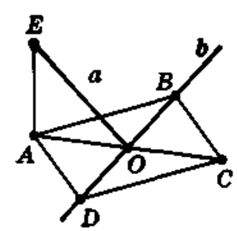
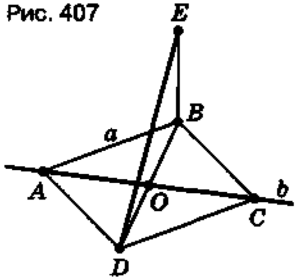


Рис. 406

Рис. 407



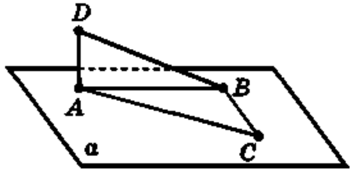


Рис. 408

982. Углы BAC и ACB треугольника ABC соответственно равны 41° и 49°, а отрезок AD перпендикулярен плоскости этого треугольника (рис. 408). Докажите, что прямые BC и BD перпендикулярны.

983. Из вершины A треугольника ABC возведен перпендикуляр AM, и точка M соединена с серединой D стороны BC (рис. 409). Докажите, что:

а) прямые MD и BC перпендикулярны, если стороны AB и AC равны;
б) стороны AB и AC равны, если прямые MD и BC перпендикулярны.

984. Отрезок AD длиной 12 см перпендикулярен плоскости равнобедренного треугольника ABC с основанием BC и боковой стороной, соответственно равными 6 см и 5 см. Определите, на каких расстояниях от прямой BC находятся концы отрезка AD.

985. Из вершины большего угла треугольника со сторонами 20 см, 34 см и 42 см возведен перпендикуляр к плоскости этого треугольника длиной 30 см. Найдите расстояние от его концов до большей стороны треугольника.

986. Стороны AB, AC, BC треугольника ABC соответственно равны 13, 12 и 5, а отрезок BD перпендикулярен плоскости этого треугольника (рис. 410). Докажите, что прямые CD и AC перпендикулярны.

Рис. 409

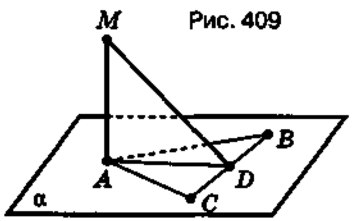
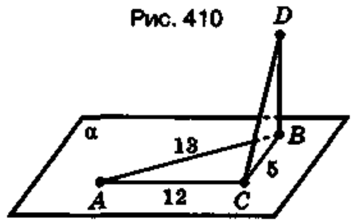


Рис. 410



987. Отрезки AE и CF — высоты треугольника ABC, а отрезок BD — перпендикуляр к плоскости ABC (рис. 411). Докажите, что прямые CD и AC перпендикулярны.

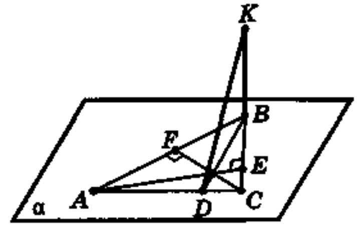


Рис. 411

988. Точка M лежит на прямой, проходящей через вершину B ромба $ABCD$ и перпендикулярной его плоскости. Найдите расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, учитывая, что $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60°$, $BM = 12{,}5$ см.

989. Докажите, что если луч KA не лежит в плоскости неразвернутого угла LKM и острые углы AKL и AKM равны, то проекция луча KA на плоскость LKM является биссектрисой угла LKM.

990. Точка X принадлежит прямой, проходящей через центр O правильного треугольника ABC перпендикулярно его плоскости. Докажите, что:

а) расстояния от точки X до вершин треугольника равны;
б) расстояния от точки X до сторон треугольника равны;
в) $\angle AXO = \angle BXO = \angle CXO$;
г) $\angle XAO = \angle XBO = \angle XCO$.

991. Точка F лежит на прямой, проходящей через вершину B квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости. Найдите расстояние от точки F до прямых, которым принадлежат стороны и диагонали квадрата, учитывая, что $BF = 8$ дм, $AB = 15$ дм.

992. Есть прямоугольный треугольник ABC, один катет которого и прилежащий к нему острый угол равны m и β. Из вершины прямого угла C восстановлен перпендикуляр CD, равный n. Найдите расстояние от точки D до прямой AB.

993. Учитывая, что точка K лежит на прямой, проходящей через центр O симметрии ромба $ABCD$ перпендикулярно его плоскости:

а) докажите равенство расстояний от точки K до всех прямых, которым принадлежат стороны ромба;

б) найдите это расстояние, если $OK = 45$ дм, $AC = 60$ дм, $BD = 80$ дм;
в) $AC = 2a$, $BD = 2b$, $KO = h$.

994. Из центра O окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и боковой стороной AB, соответственно равными 18 см и 15 см, возведен перпендикуляр OX, равный 6 см. Найдите расстояния точки X от сторон треугольника.

995. Основанием треугольной пирамиды $DFGH$ является прямоугольный треугольник FGH с гипотенузой FG и углом HFG в 30°. Найдите высоту грани FDG, проведенную из вершины D, учитывая, что боковое ребро DH перпендикулярно плоскости основания и равно 4 см, а $FH = 6$ см.

996. В равнобедренном треугольнике XYZ с основанием XY боковая сторона равна 20, а угол при основании составляет 30°. Из его вершины Y к плоскости XYZ возведен перпендикуляр QY. Найдите расстояния от точки Q до прямой XZ и от точки Y до плоскости XQZ, учитывая, что $QY = 10$.

997. Основанием четырехугольной пирамиды $QABCD$ является ромб $ABCD$ с углом ABC и стороной AB, соответственно равными 60° и a. Боковое ребро AQ пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Найдите это ребро и расстояние от точки A до плоскости QDC, учитывая, что площадь грани QDC равна a^2.

998. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке Q, прямая HQ перпендикулярна плоскости данного параллелограмма. Найдите высоту параллелограмма, учитывая, что его стороны равны 20 см и 50 см, а расстояния от точки H до сторон параллелограмма равны 17 см и 25 см.

999. Точка A, лежащая вне плоскости прямого угла UVW, отстоит от его вершины V на x, а от каждой из сторон — на y (рис. 412). Найдите расстояние AO точки A от плоскости прямого угла.

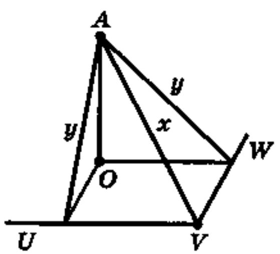


Рис. 412

1000. Есть прямоугольный треугольник XYZ с гипотенузой YZ и катетом XY, соответственно равными 13 см и 12 см. К плоскости треугольника из центра Q вписанного в него круга возведен перпендикуляр QG длиной 1,5 см. Найдите расстояния точки G от сторон треугольника и от его вершин.

1001. Из вершины M треугольника MNK вне его плоскости проведена прямая ML, образующая со сторонами MN и MK равные острые углы. Определите, на какие части проекция прямой ML на плоскость треугольника разделяет сторону NK, учитывая, что $MN = 51$ м, $MK = 34$ м и $NK = 30$ м.

1002. Вершина пирамиды, в основании которой лежит прямоугольная трапеция с периметром 32, находится на расстоянии $\sqrt{17}$ от ребер основания. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что ее наибольшее и наименьшее боковые ребра равны $7\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$.

1003. Из вершины B прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 6$ см и $AD = 6\sqrt{2}$ см, к его плоскости возведен перпендикуляр BQ. Найдите расстояние от точки Q до плоскости прямоугольника, учитывая, что угол между прямой QD и плоскостью ABC равен 30°.

1004. Докажите, что проекцией прямой на плоскость является прямая.

1005. Найдите проекцию на плоскость наклонной длиной m, учитывая, что наклонная образует с плоскостью угол, равный:

а) 45°; б) 60°; в) 30°.

1006. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость, а его концы находятся на расстоянии 3 см и 2 см от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

1007. Из точки, отстоящей от плоскости на d, проведены две наклонные, которые образуют между собой угол φ, а с плоскостью — углы α и β. Найдите расстояние между их концами, учитывая, что:

а) $\alpha = \beta = 45°$, $\varphi = 60°$; б) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 90°$.

1008. Из точки, отстоящей от плоскости на d, проведены две наклонные, которые образуют с плоскостью углы α и β, а их проекции — угол φ. Найдите расстояние между их концами, учитывая, что:

а) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 150°$; б) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 90°$.

1009. Докажите, что угол между прямой и плоскостью является наименьшим из углов, которые образует эта прямая со всеми прямыми плоскости, проходящими через точку пересечения прямой с плоскостью.

1010. Из точки A, отстоящей на d от плоскости α, проведены наклонные AB и AC под углом 30° к плоскости. Их проекции на плоскость α образуют угол в 120°. Найдите длину отрезка BC.

1011. Докажите, что:

а) если один катет равнобедренного прямоугольного треугольника принадлежит плоскости, а другой образует с ней угол 45°, то гипотенуза образует с плоскостью угол в 30°;
б) если наклонная a образует с плоскостью α угол в 45°, а прямая b плоскости — угол в 45° с проекцией наклонной, то угол между прямыми a и b равен 60°.

1012. Точка P отстоит на a от каждой вершины квадрата $ABCD$ со стороной a. Найдите угол, который образует с плоскостью квадрата прямая AP.

1013. Есть треугольная пирамида, все ребра которой равны друг другу. Найдите угол между ребром пирамиды и гранью, которой оно не принадлежит.

1014. Из точки Q к плоскости α проведены такие равные наклонные QA и QB, что угол между ними равен 60°, а угол между их проекциями на плоскость α составляет 90°. Найдите угол, который образует наклонная QA с плоскостью α.

1015. Боковое ребро RA четырехугольной пирамиды, основанием которой является прямоугольник $ABCD$, перпендикулярно плоскости основания. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника RAC, учитывая, что ребро RB равно 20 мм, а боковые ребра RB и RD наклонены к плоскости основания под углами 30° и 45° соответственно.

1016. Докажите, что если в правильной треугольной пирамиде сторона основания равна расстоянию от вершины до плоскости основания, то боковые ребра наклонены к плоскости основания под углами в 60°.

1017. Вершина правильной четырехугольной пирамиды отстоит от плоскости основания на h, а ее боковые ребра образуют с плоскостью основания углы в 60°. Найдите боковую поверхность пирамиды.

1018. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите расстояние между прямыми:

а) AB_1 и CD_1; б) AC и BB_1; в) A_1D и C_1A.

1019. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Найдите расстояние между диагональю параллелепипеда и диагоналями его граней.

1020. В треугольной пирамиде все ребра равны a. Найдите расстояние между ребрами, не принадлежащими одной грани.

1021. В треугольной пирамиде все ребра основания равны a, а все боковые ребра — b. Найдите расстояние между боковым ребром и ребром основания, не лежащим с ним в одной плоскости.

1022. Точка M — середина ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние между прямыми A_1M и B_1C, учитывая, что ребро куба равно a.

1023. В четырехугольной пирамиде все ребра основания равны a, а все боковые ребра — b. Найдите расстояние между боковым ребром и ребром основания, не лежащим с ним в одной плоскости.

1024. Докажите тождество:

а) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$;

б) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$.

1025. Докажите тождество:

а) $\operatorname{ctg} 15° + \operatorname{tg} 15° = 4$;

б) $\operatorname{tg}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(z-\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{tg} 2z$;

в) $\sin 2\gamma - \operatorname{tg}\gamma = \cos 2\gamma\cdot\operatorname{tg}\gamma$;

г) $\operatorname{ctg} x - \sin 2x = \cos 2x\cdot\operatorname{ctg} x$;

д) $\frac{1}{1-\operatorname{tg} y} - \frac{1}{1+\operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} 2y$;

е) $\frac{\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tg} 3b\cdot 3\operatorname{ctg} b$.

1026. Докажите, что если $a + b + c = \pi$, то:

а) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$;

б) $\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$.

1027. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg} 3\beta - \operatorname{tg} 2\beta - \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 3\beta \cdot \operatorname{tg} 2\beta \cdot \operatorname{tg} \beta$;

б) $\dfrac{1 + \cos\beta + \cos 2\beta + \cos 3\beta}{2\cos^2\beta + \cos\beta - 1} = 2\cos\beta$;

в) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x+y)} = \operatorname{tg} y$.

1028. Введя вспомогательный аргумент, например $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, представьте произведением выражение:

а) $1 + \sin a$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin y$; д) $\sqrt{3} + 2\cos a$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 35°$; е) $\frac{1}{4} - \cos^2 c$.

1029. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin x + \cos 2x$; в) $\sin 2z - \cos 4z$;

б) $\dfrac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$; г) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

1030. На отрезке AB выбрали точку O, отстоящую на 50 мм от точки A, и на отрезках-частях OA и OB как на высотах построили такие прямоугольные трапеции $OCDA$ и $OCFB$, что средняя линия второй — 40 мм, а их площади относятся как $2 : 1$. Когда на отрезке AB как на высоте построили третью прямоугольную трапецию с площадью $ABGE$, равной суммарной площади трапеций $OCDA$ и $OCFB$, то ее средняя линия оказалась равной 45 мм (рис. 413). Найдите стороны и углы этих трапеций, учитывая, что основание OC трапеции $OCFB$ в два раза больше боковой стороны OB.

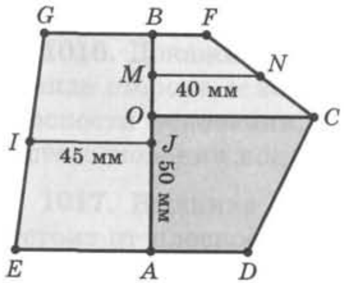


Рис. 413

1031. На отрезке MN выбрали точку A, отстоящую на 64 мм от точки N, и на отрезках-частях AM и AN как на средних линиях построили такие трапеции $OPQR$ и $ILKJ$, что высота первой из них равна 30 мм, а их площади относятся как $45 : 88$. Если бы на отрезке MN как на средней линии построили третью трапецию $STUV$ с площадью, равной суммарной площади трапеций $OPQR$ и $ILKJ$, то ее высота оказалась бы равной 38 мм (рис. 414). Найдите площади трапеций $OPQR$ и $ILKJ$.

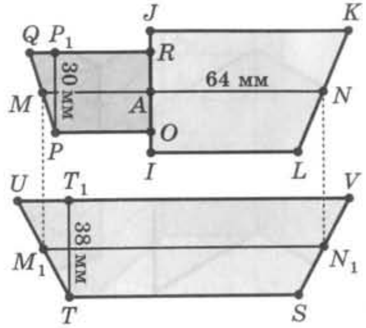


Рис. 414

* * *

1032. Три мотоциклиста A, B и C выехали одновременно из некоторой точки кольцевой трассы в одном направлении с постоянными скоростями и через некоторое время снова оказались в одной точке. Определите, сколько раз за это время A перегонял C, учитывая, что A 3 раза перегнал B и B 4 раза перегнал C.

1033. В окружность вписан правильный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$. Докажите, что значение выражения $AA_1^2 + AA_2^2 + \ldots + AA_n^2$ не зависит от выбора точки A на окружности, и найдите это значение.

1034. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^5 + xy = y^{10} + y^6, \\ x^6 + x^2 = 8y^3 + 2y. \end{cases}$

20. Перпендикулярность плоскостей

Два луча с общим началом разделяют плоскость на две части, каждая из которых называется *углом* (рис. 415).

Аналогично две полуплоскости с общей границей разделяют пространство на две части (рис. 416). Каждую из этих частей вместе с полуплоскостями называют **двугранным углом.** Полуплоскости, огра-

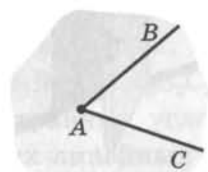


Рис. 415

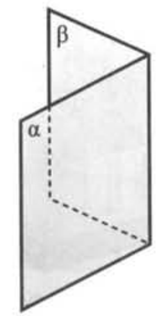


Рис. 416

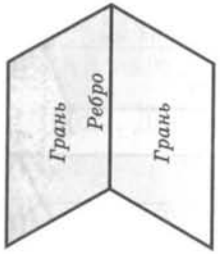


Рис. 417

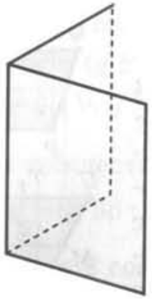


Рис. 418

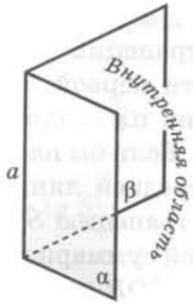


Рис. 419

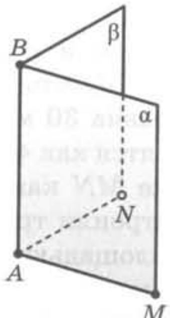


Рис. 420

ничивающие двугранный угол, называют **гранями** угла, а общую прямую — **ребром** двугранного угла (рис. 417).

Обычно рассматривают меньший из двугранных углов с данными гранями (рис. 418). Точки угла, не лежащие на его гранях, составляют *внутреннюю область* двугранного угла (рис. 419).

Двугранный угол обычно обозначают по ребру: $\angle a$ (см. рис. 419), или $\angle AB$ (рис. 420). При необходимости можно присоединить названия граней или названия точек на гранях: $\angle \alpha a \gamma$ (см. рис. 419), или $\angle \alpha AB\gamma$ (см. рис. 420), или $\angle MABN$ (см. рис. 420).

Моделью двугранного угла могут служить двускатная крыша (рис. 421), стена вместе с открытой дверью (рис. 422), полураскрытая книга (рис. 423).

Для измерения двугранных углов вводится понятие линейного угла. Выберем на ребре AB двугранного угла $\alpha AB\gamma$ точку P и в его гранях α и β из этой точки проведем лучи PQ и PR, перпендикулярные ребру AB (рис. 424). Полученный угол QPR, стороны которого PQ и PR ограничивают часть плос-

Рис. 421

Рис. 422

Рис. 423

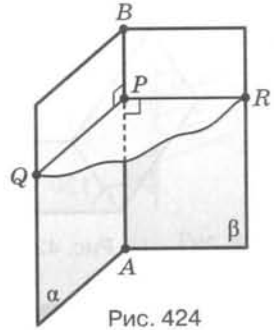


Рис. 424

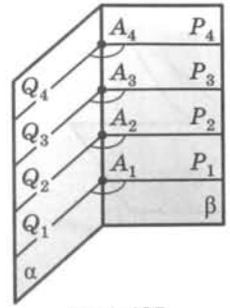


Рис. 425

кости PQR, принадлежащую двугранному углу $\alpha AB\gamma$, называют **линейным углом** двугранного угла. Плоскость линейного угла перпендикулярна ребру двугранного угла, так как по построению лучи PQ и PR перпендикулярны ребру AB.

Понятно, что двугранный угол имеет бесконечно много линейных углов (рис. 425).

Теорема 10. ***Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.***

Доказательство. Пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — линейные углы двугранного угла MN (рис. 426). Докажем, что $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$.

Отложим на сторонах углов $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равные отрезки MP, MQ, MS, MR. Тогда получатся четырехугольники PQB_2B_1 и SRB_2B_1, у которых противоположные стороны PB_1 и QB_2, а также SB_1 и RB_2 равны по построению и параллельны как перпендикуляры к одной прямой, проведенные в соответствующей плоскости. Поэтому $PQ = B_2B_1 = SR$ и $PQ \parallel B_2B_1 \parallel SR$. А это означает, что четырехугольник $PQRS$ является параллелограммом, что позволяет сделать вывод о равенстве отрезков PS и QR. Получили, что у треугольников PSB_1 и QRB_2 равны соответственные стороны, поэтому треугольники равны, а значит, равны и их углы $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

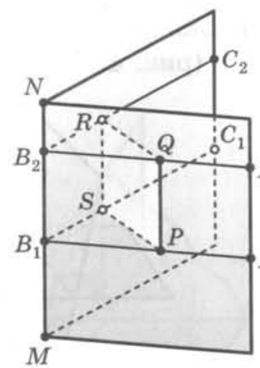


Рис. 426

Измерение двугранных углов связано с измерением их линейных углов. В зависимости от того, каким — острым,

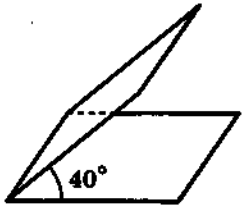


Рис. 427

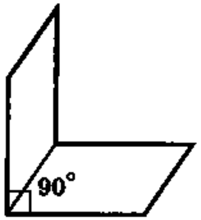


Рис. 428

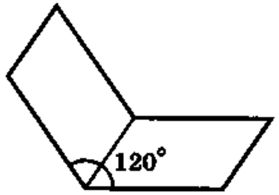


Рис. 429

прямым, тупым, развернутым — является линейный угол двугранного угла, отличают *острые, прямые, тупые, развернутые двугранные углы*. Двугранный угол, изображенный на рисунке 427, — острый, на рисунке 428, — прямой, на рисунке 429, — тупой.

Две пересекающиеся плоскости разделяют пространство на четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 430). Если один из них равен α, то еще один из них также равен α, а два остальных — по $180° - \alpha$ каждый. Среди этих углов есть угол, не превосходящий 90°, его величину и принимают за величину угла между пересекающимися плоскостями.

Если один из углов, образовавшихся при пересечении двух плоскостей, прямой, то три остальных также прямые (рис. 431).

Плоскости, при пересечении которых образуются прямые двугранные углы, называются **перпендикулярными плоскостями**.

Для обозначения перпендикулярности плоскостей, как и для обозначения перпендикулярности прямых, используют знак $\perp$.

Моделями перпендикулярных плоскостей могут служить крышка стола и его боковина (рис. 432), пол комнаты и дверь в нее (рис. 433).

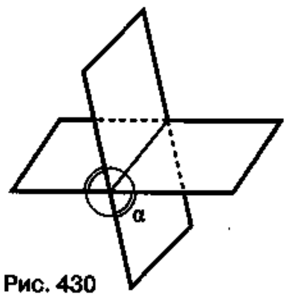


Рис. 430

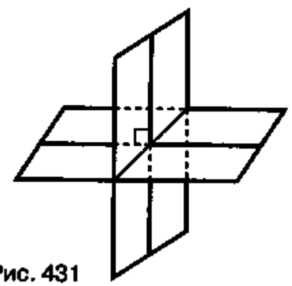


Рис. 431

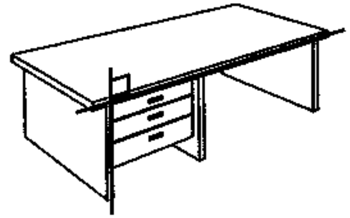


Рис. 432

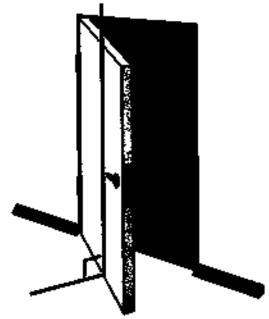


Рис. 433

Теорема 11. ***Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.***

Доказательство. Пусть через прямую a, которая перпендикулярна плоскости α и пересекает ее в точке M, проходит плоскость β (рис. 434). Докажем, что $\alpha \perp \beta$.

Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой MP, перпендикулярной прямой a, так как по условию прямая a и плоскость α перпендикулярны.

В плоскости α проведем прямую MN, перпендикулярную прямой MP. Полученный угол MPQ, где Q — точка прямой a, есть линейный угол двугранного угла $\alpha MP\beta$. Поскольку по условию $a \perp \alpha$, то угол MPQ — прямой, и, значит, плоскости α и β перпендикулярны.

Теорема 11 выражает *признак перпендикулярности плоскостей*.

Следствие. ***Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна каждой из них*** (рис. 435).

Докажем теперь утверждение, обратное утверждению теоремы **11**.

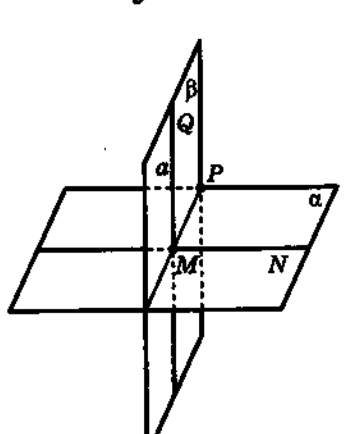


Рис. 434

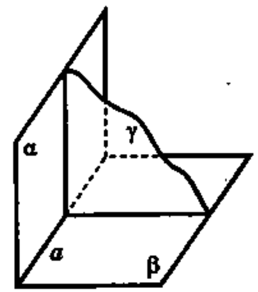


Рис. 435

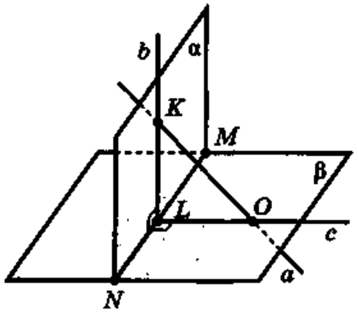


Рис. 436

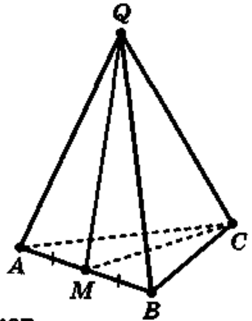


Рис. 437

Теорема 12. ***Если через точку одной из перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эта прямая принадлежит первой плоскости.***

Доказательство. Пусть две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN, и через точку K плоскости α проведена прямая a, перпендикулярная плоскости β. Докажем, что эта прямая принадлежит плоскости α.

Через точку K в плоскости α проведем прямую b, перпендикулярную MN, и через точку L их пересечения в плоскости β — прямую c, также перпендикулярную MN (рис. 436). Угол между прямыми b и c прямой как линейный угол прямого двугранного угла. Получили, что прямая b проходит через точку K и перпендикулярна плоскости β, так как она перпендикулярна пересекающимся прямым MN и c этой плоскости. А поскольку через данную точку к данной плоскости можно провести только одну перпендикулярную прямую, то прямые b и a совпадают. Значит, прямая a принадлежит плоскости α.

Пример 1. Точка M — середина ребра AB при основании правильной пирамиды $QABC$ (рис. 437). Докажем, что плоскость QCM перпендикулярна плоскости основания ABC.

Прямая AB является основанием равнобедренных треугольников AQB и ACB. Поэтому она перпендикулярна медианам QM и CM в этих треугольниках и вместе с этим плоскости QCM. Из теоремы 12 следует, что плоскость ABC, проходящая через перпендикуляр AB к плоскости QCM, ей перпендикулярна.

Следствие. ***Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то их линия пересечения перпендикулярна той же плоскости*** (рис. 438).

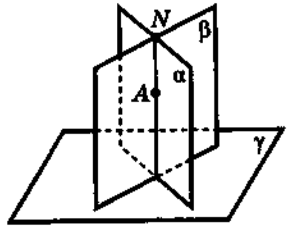


Рис. 438

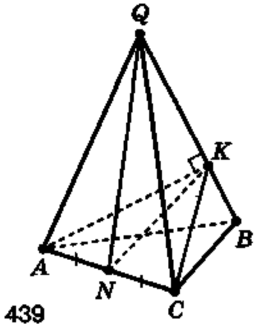


Рис. 439

Пример 2. В правильной треугольной пирамиде $QABC$ плоский угол AQB при вершине равен α. Найдем двугранный угол при боковом ребре.

Пусть N — середина ребра AC, AK — перпендикуляр к ребру BQ, проведенный из точки A (рис. 439). Из равенства треугольников ABQ и CBQ следует, что $CK \perp BQ$. Поэтому угол AKC — линейный угол двугранного угла BQ.

Из прямоугольных треугольников AKQ и ANQ получаем: $AK = AQ \sin\alpha$, $AN = AQ \sin\frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника AKN находим, что $\sin\frac{\angle AKC}{2} = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Поэтому $\angle AKC = 2\arcsin\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

?

1. Что называют углом? Что называют двугранным углом?
2. Что называют гранью двугранного угла; ребром двугранного угла? Как обозначают двугранный угол?
3. Как построить линейный угол двугранного угла? Какое свойство имеют линейные углы двугранного угла?
4. Какой двугранный угол называют острым; прямым; тупым; развернутым?
5. Какие плоскости называются перпендикулярными?
6. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
7. Сформулируйте свойство плоскости, перпендикулярной линии пересечения двух плоскостей.
8. Сформулируйте свойство прямой, проведенной через точку одной из перпендикулярных плоскостей перпендикулярно другой плоскости.
9. Сформулируйте свойство линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей.

1035. Сколько двугранных углов имеет:

а) треугольная пирамида;
б) параллелепипед?

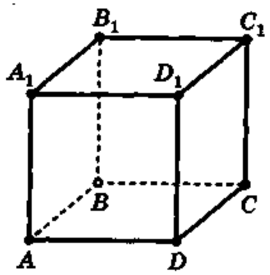


Рис. 440

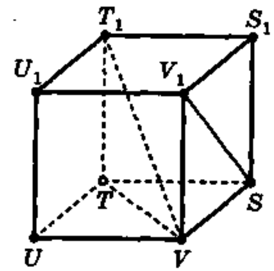


Рис. 441

1036. Есть параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 440), в основании которого лежит квадрат. Назовите его:

а) прямые двугранные углы;
б) перпендикулярные грани.

1037. Есть прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите линейный угол двугранного угла:

а) DD_1; б) A_1B_1.

1038. Учитывая, что $STUVS_1T_1U_1V_1$ — куб (рис. 441), определите:

а) является ли угол TVT_1 линейным углом двугранного угла T_1SVT;
б) является ли угол T_1ST линейным углом двугранного угла T_1SVT;
в) величину двугранного угла V_1UTS.

1039. Могут ли две плоскости, каждая из которых перпендикулярна третьей плоскости, быть:

а) параллельными плоскостями;
б) перпендикулярными плоскостями?

1040. Учитывая, что точка T — середина ребра QR треугольной пирамиды $OPQR$, у которой основанием является правильный треугольник PQR, а боковые ребра равны друг другу, определите является ли угол:

а) PRO линейным углом двугранного угла $PRQO$;
б) PTO линейным углом двугранного угла $PRQO$.

1041. Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ равны друг другу, а точка M — середина ребра AC. Докажите, что угол DMB является линейным углом двугранного угла $BACD$.

1042. Есть два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани вместе составляют плоскость. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна 180°.

1043. Докажите, что если двугранный угол $\alpha AB\beta$ разбить на два двугранных угла $\alpha AB\gamma$ и $\gamma AB\beta$ (рис. 442), то линейный угол двугранного угла $\alpha AB\beta$ равен сумме линейных углов двугранных углов $\alpha AB\gamma$ и $\gamma AB\beta$.

1044. Из вершины X треугольника XYZ, сторона YZ которого лежит в плоскости β, проведены высота XA и перпендикуляр XP к плоскости β (рис. 443). Докажите, что угол XAP — линейный угол двугранного угла $XYZP$.

1045. Докажите, что через данную точку можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Сколько существует таких плоскостей?

1046. Докажите, что плоскость линейного угла двугранного угла перпендикулярна каждой его грани.

1047. Прямая a не перпендикулярна плоскости α. Докажите, что существует плоскость, которая содержит прямую a и перпендикулярна плоскости α.

1048. На рисунке 444 двугранные углы $RABP$ и $PABQ$ равны. Докажите, что каждая точка плоскости ABP равноудалена от плоскостей ABR и ABQ.

1049. Две точки одной грани двугранного угла отстоят от его ребра на 51 см и 34 см, а первая из них отстоит от другой грани на 15 см. Найдите расстояние до этой грани от другой точки.

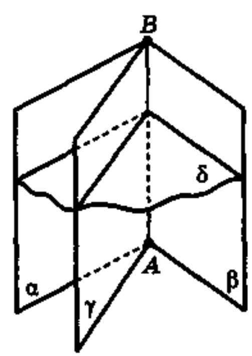


Рис. 442

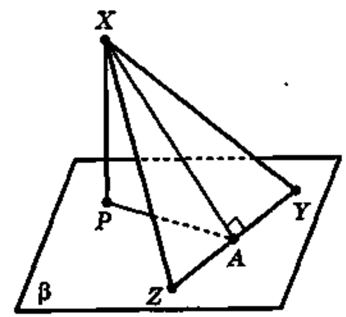


Рис. 443

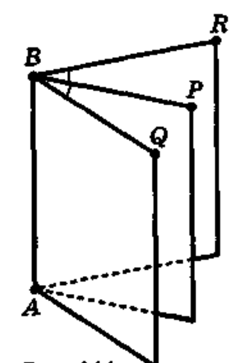


Рис. 444

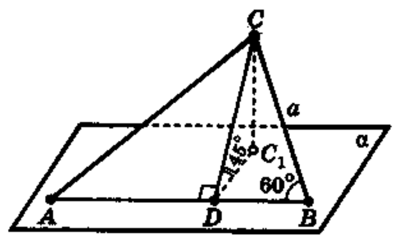


Рис. 445

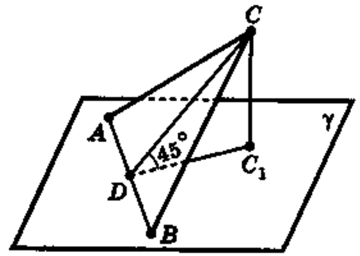


Рис. 446

1050. На одной грани двугранного угла выбрана точка X, отстоящая на 36 см от ребра угла и на 24 см от другой его грани, на другой грани этого угла выбрана точка Y, отстоящая от первой грани на 18 см. Найдите расстояние точки Y от ребра угла.

1051. Плоскость прямоугольного треугольника ABC наклонена к плоскости α под углом в 45° (рис. 445). Найдите расстояние вершины прямого угла C от плоскости α, учитывая, что $\angle ABC = 60°$, $BC = a$.

1052. Через гипотенузу AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC под углом в 45° к его плоскости проведена плоскость γ, отстоящая от вершины прямого угла C на l (рис. 446). Найдите площадь треугольника ABC.

1053. Больший катет прямоугольного треугольника с острым углом и гипотенузой, соответственно равными 30° и c, лежит в плоскости γ, составляющей с плоскостью треугольника угол в 60°. Найдите:

а) расстояние от вершины большего острого угла треугольника до плоскости γ;
б) угол между гипотенузой и плоскостью γ.

1054. Найдите расстояние от вершины прямого угла прямоугольного треугольника с катетами, равными 7 см и 24 см, до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет с плоскостью треугольника угол в 30°.

1055. Основанием прямой призмы является треугольник MNK, в котором $MN = NK = 25$ см, $MK = 14$ см. Через сторону MK проведена плоскость под углом 30° к плоскости основания, пересекающая противоположное боковое ребро в точке L. Найдите:

а) отрезок NL бокового ребра;
б) площадь полученного сечения.

1056. Через сторону CE треугольника CDE, у которого $CD = 9$ м, $DE = 6$ м и $CE = 5$ м, проходит плоскость α, составляющая с плоскостью треугольника угол в 45°. Найдите расстояние до плоскости α от вершины D.

1057. Ребро CD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC, $AB = BC = AC = 6$ и $BD = 3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

1058. Найдите двугранный угол $ABCD$ треугольной пирамиды $ABCD$, учитывая, что углы DAB, DAC и ACB прямые, $AC = CB = 5$ и $DB = 5\sqrt{5}$.

1059. Общая сторона AB треугольников ABC и ABD равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите CD, учитывая, что треугольники:

а) равносторонние;
б) прямоугольные равнобедренные с гипотенузой AB.

1060. Плоскости правильных треугольника KDM и четырехугольника $KMNP$ перпендикулярны. Найдите DN, учитывая, что $KM = a$.

1061. Правильные треугольники ABC и DBC расположены так, что вершина D проектируется в центр треугольника ABC. Найдите угол между плоскостями этих треугольников.

1062. Проекцией прямоугольника $ABCD$ на плоскость β является квадрат ABC_1D_1. Найдите угол между плоскостью β и плоскостью прямоугольника $ABCD$, учитывая, что $AB : BC = 1 : 2$.

1063. Отрезок EL, соединяющий вершину E треугольника CDE с вершиной L треугольника CDL, перпендикулярен плоскости этого треугольника. Докажите, что площадь треугольника CDE равна $S \cdot \cos\varphi$, где S — площадь треугольника CDL, φ — угол между плоскостями CDL и CDE.

1064. Параллельные прямые AB и CD лежат в разных гранях двугранного угла, равного 60°, а их точки A и D отстоят от ребра этого угла соответственно на 16 см и 13 см. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

1065. Из точек A и B ребра двугранного угла, равного $120°$, в разных его гранях возведены перпендикуляры AC и BD к ребру. Найдите отрезок CD, учитывая, что $AB = AC = BD = a$.

1066. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а их длина равна l. Найдите косинус угла, образованного плоскостью боковой грани с плоскостью основания.

1067. Перпендикуляры, опущенные из точек C и D, взятых в разных перпендикулярных плоскостях, на линию их пересечения, соответственно равны c и d, а расстояние между их основаниями равно l. Найдите отрезок CD и его проекции на каждую из плоскостей.

1068. Из точек C и D ребра двугранного угла, равного $120°$, в разных его гранях возведены перпендикуляры CK и DL. Найдите длину отрезка KL, учитывая, что $CD = CK = DL = 3$ см.

1069. В разных гранях двугранного угла из точек M и N его ребра к этому ребру возведены перпендикуляры MA и NB. Определите расстояние AB, учитывая, что двугранный угол:

а) прямой, $MN = 36$ см, $MA = 18$ см и $NB = 12$ см;
б) равен $120°$, $MN = 12$, $MA = 8$, $NB = 4$;
в) равен $120°$, $MN = MA = NB = x$.

1070. Из точек M и N ребра двугранного угла в разных его гранях возведены перпендикуляры MK и NL. Определите величину двугранного угла, учитывая, что $MN = 48$ см, $MK = 16$ см, $NL = 10$ см и расстояние между точками K и L равно 50 см.

1071. Сторона IJ треугольника IJK, у которого $IJ = JK = 9$ см, $IK = 12$ см, лежит в плоскости α, а проекции двух других сторон треугольника на эту плоскость относятся как $1 : 2$. Определите величину двугранного угла, образованного плоскостями α и IJK.

1072. Найдите двугранный угол, образованный двумя боковыми гранями четырехугольной пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной $20\sqrt{3}$ см, а боковые ребра равны 30 см каждое.

1073. Отрезок длиной a с концами на двух перпендикулярных плоскостях образует с одной из них угол в $45°$, а с другой — угол в $30°$. Найдите часть линии пересечения плоскостей, заключенную между перпендикулярами, опущенными на нее из концов отрезка.

1074. Есть пирамида, в основании которой лежит правильный шестиугольник со стороной 12 дм, а все боковые ребра равны 24 дм. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная к нему. Найдите площадь сечения.

1075. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Боковое ребро против средней по величине стороны основания перпендикулярно плоскости основания и равно 16 см. Найдите величины двугранных углов при основании этой пирамиды.

1076. В треугольной пирамиде все ребра равны. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

1077. В треугольной пирамиде все ребра основания равны a, а все боковые ребра — b. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

1078. В четырехугольной пирамиде все ребра равны. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

1079. В четырехугольной пирамиде все ребра основания равны a, а все боковые ребра — b. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

1080. Докажите, что истинно равенство:

а) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12} - \operatorname{tg}\frac{11\pi}{12} = -2\sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg} 55° - \operatorname{tg} 35° = 2 \operatorname{tg} 20°$;

в) $\frac{\operatorname{tg}(x+y)+\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg}(x-y)} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$;

г) $\frac{\sin^3 a + \sin 3a}{\cos^3 a - \cos 3a} = \operatorname{ctg} a$.

1081. Учитывая, что: $\operatorname{tg} a = \frac{7}{4}$ и $\operatorname{tg} b = \frac{9}{5}$, найдите:

а) $\operatorname{tg}(a+b)$; б) $\operatorname{tg}(a-b)$; в) $\operatorname{ctg}(a+b)$; г) $\operatorname{ctg}(a-b)$.

1082. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg} 2\gamma - \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos 2\gamma}$;

б) $\cos t \cdot \sin^{-1} t - \sin t \cdot \cos^{-1} t = 2 \operatorname{ctg}^2 2t$.

1083. Введя вспомогательный аргумент, например $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, представьте произведением выражение:

а) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} 19°$; в) $3 - \operatorname{tg}^2 z$; д) $\frac{3}{4} - \sin^2 t$;

б) $1 + \operatorname{ctg} 29°$; г) $\frac{1}{4} - \sin^2 b$; е) $\frac{3}{4} - \cos^2 u$.

1084. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin a + \sin b + \sin(a - b)$; в) $1 + \sin g + \cos g$;

б) $\cos a + \cos b + \sin(a + b)$; г) $1 - \sin x - \cos x$.

1085. Найдите сумму:

а) $\sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + ... + \sin n\varphi$;

б) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + ... + \cos k\alpha$.

1086. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} = \frac{6}{x-6}$; в) $5x^2 + 2013x + 2008 = 0$;

б) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{x-3}{x+3} + \frac{x-4}{x+4}$; г) $\frac{x^2 - x + 2}{3x^2 - 5x - 14} = \frac{x^2 - x + 6}{3x^2 - 5x - 10}$.

1087. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{x-1} < 1$; в) $\frac{2x-3}{3x-2} \leqslant \frac{4x-1}{x-4}$;

б) $\frac{2x^2}{x+1} > 1$; г) $|2x - 1| + |3x - 2| \geqslant 5x - 3$.

1088. Ток в одной цепи равен 4 А, во второй — 11 А, а напряжения в них относятся как 2 : 7. Найдите мощности токов в первой и во второй цепях, учитывая, что в третьей цепи, мощность и сила тока в которой соответственно равны суммарной мощности и суммарной силе токов в первой и во второй цепях, напряжение составляет 170 В (рис. 447).

1089. Напряжение в одной цепи равно 160 В, во второй — 80 В, а токи в них относятся как 5 : 2. Найдите мощности токов в первой и во второй цепях, учитывая, что в третьей цепи, мощность и напряжение в которой соответственно равны сум-

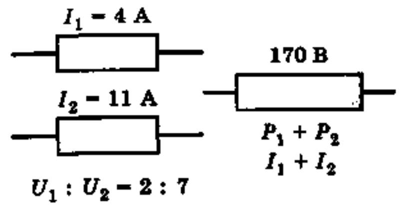


Рис. 447

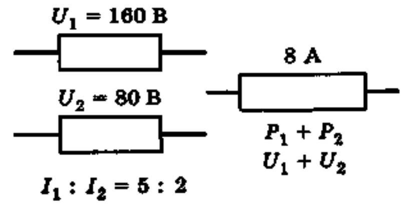


Рис. 448

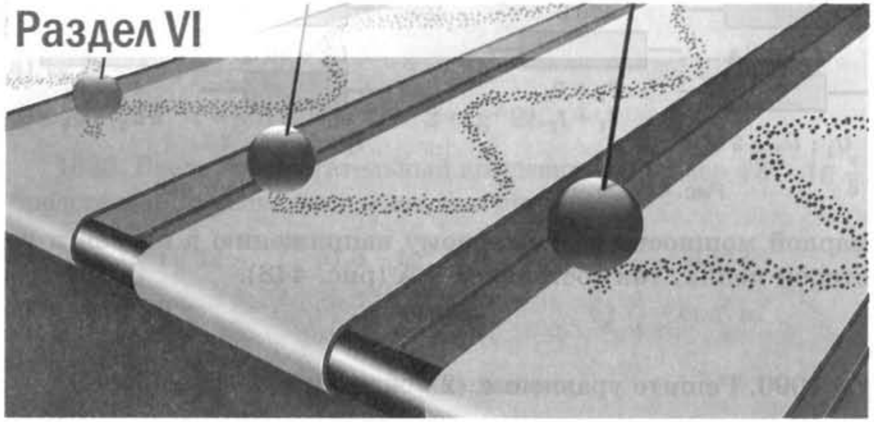
марной мощности и суммарному напряжению в первой и во второй цепях, ток составляет 8 А (рис. 448).

* * *

1090. Решите уравнение $(2x^3 + x - 3)^3 = 3 - x^3$.

1091. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и BL. Найдите величину угла A, учитывая, что прямая KL делит угол AKC пополам.

1092. На бумаге в клетку нарисован прямоугольник размерами $m \times n$, стороны которого идут по линиям сетки. Определите, при каких значениях переменных m и n этот прямоугольник можно разрезать на «уголки» из трех клеток.



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

21. Функции синус и арксинус

Мы знаем, что синусом числа x называется синус угла, равного x радиан.

Функция, которая задается формулой $y = \sin x$, где x — аргумент, называется **синусом**.

Теорема 1. ***Областью определения функции $y = \sin x$ является множество R действительных чисел, а областью значений — промежуток $[-1; 1]$.***

Доказательство. Синус числа x есть ордината z точки $M_x(t, z)$ единичной окружности, полученной из точки $M_0(1; 0)$ поворотом на угол в x радиан (рис. 449). Поскольку поворот возможен на любой угол x как в положительном, так и в отрицательном направлениях, то областью определения функции $y = \sin x$ является множество R всех действительных чисел.

Поскольку ордината точки единичной окружности принимает значения в пределах от -1 до 1, то областью значений функции $y = \sin x$ является промежуток $[-1; 1]$.

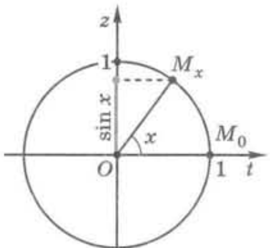


Рис. 449

Таким образом, график функции $y = \sin x$ расположен в полосе с границами $y = -1$ и $y = 1$.

Функция $y = f(x)$ называется **периодической** с периодом T, $T \neq 0$, если для любого значения аргумента x из области определения значения функции в точках

x, $x - T$, $x + T$ равны друг другу, т. е. $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$. Число T при этом называется **периодом** функции $f(x)$.

Из этого определения следует, что если число x принадлежит области определения функции, то и числа $x - T$, $x + T$, и вообще числа $x + nT$, где n — целое число, также принадлежат области определения функции и $f(x + nT) = f(x)$.

Теорема 2. ***Функция $y = \sin x$ является нечетной и периодической, причем наименьшим положительным периодом является число 2π.***

Доказательство. В соответствии с теоремой 3 параграфа 13 для любого числа x истинно равенство

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

а это в соответствии с определением нечетной функции позволяет утверждать, что функция $y = \sin x$ нечетная.

Числа x, $x - 2\pi$, $x + 2\pi$ на единичной окружности изображаются одной точкой. Поэтому этим числам соответствует одна и та же ордината, т. е. синусы чисел x, $x - 2\pi$ и $x + 2\pi$ одинаковы:

$$\sin(x) = \sin(x - 2\pi) = \sin(x + 2\pi).$$

Это означает, что число 2π есть период синуса.

Остается доказать, что это число является наименьшим из положительных периодов этой функции. Пусть M — точка единичной окружности с ординатой 1 (рис. 450). Если двигаться в положительном направлении по единичной окружности, то ближайшей точкой с ординатой 1 будет эта же точка M, для чего придется пройти всю окружность, т. е. пройти путь длиной 2π. Получается, что положительный период функции $y = \sin x$ не может быть меньше 2π.

Теорема 3. ***Функция $y = \sin x$ возрастает от -1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ и убывает от 1 до -1 на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, где k — любое целое число, и принимает нулевое значение при значениях аргумента x, равных $k\pi$, где k — любое целое число.***

Доказательство. Будем двигать точку M_x по единичной окружности от положения $M_{-\frac{\pi}{2}}$ до положения $M_{\frac{3\pi}{2}}$ и про-

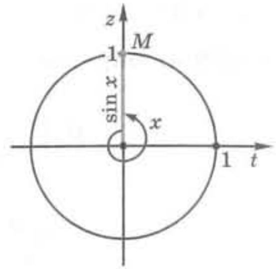


Рис. 450

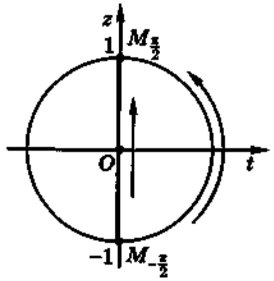


Рис. 451

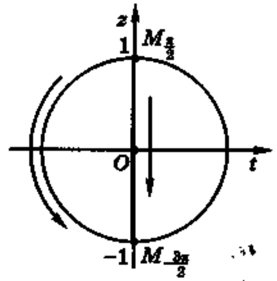


Рис. 452

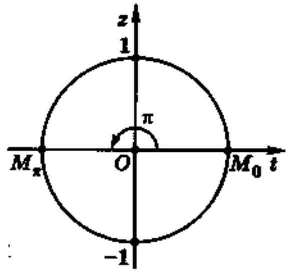


Рис. 453

следим за изменением ординаты этой точки. Эта ордината при движении до положения $M_{\frac{\pi}{2}}$ возрастает от −1 до 1 (рис. 451), а при дальнейшем движении до положения $M_{\frac{3\pi}{2}}$ убывает от 1 до −1 (рис. 452). При этом в положениях M_0 и M_π ордината становится равной нулю (рис. 453).

Учитывая то, что периодом функции $y = \sin x$ является число 2π, получим, что эта функция ведет себя так же и на любом промежутке, который получается из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ сдвигом влево или вправо на любое количество периодов, т. е. на число вида $2k\pi$, где k — целое число. Таким образом, на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает от −1 до 1, а на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ убывает от 1 до −1. Учитывая период функции $y = \sin x$ и то, что число π получается из числа 0 поворотом на π, можем утверждать, что функция $y = \sin x$ в точках $k\pi$ примет нулевое значение.

Для приближенного построения графика функции $y = \sin x$, который называется *синусоидой*, можно использовать такой прием. Разделим первую четверть единичной окружности на 8 долей и на столько же долей отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси абсцисс, расположив окружность так, как показано на рисунке 454. Через

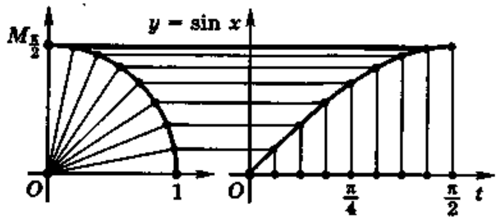


Рис. 454

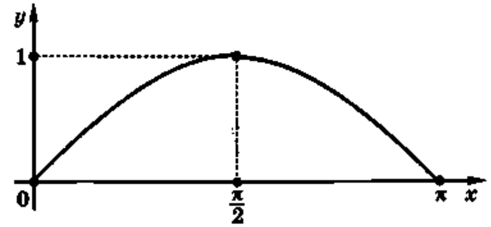


Рис. 455

точки деления дуги проведем прямые, параллельные оси абсцисс, и отметим точки их пересечения с соответствующими прямыми, проведенными параллельно оси ординат через точки деления отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси абсцисс. Эти 8 точек принадлежат графику функции $y = \sin x$. Соединим их плавной кривой и получим часть искомой синусоиды на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь учтем, что $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Это означает, что график синуса симметричен относительно прямой $y = \frac{\pi}{2}$. В результате получим часть синусоиды на промежутке $[0;\ \pi]$ (рис. 455).

Используя нечетность синуса, получим часть синусоиды на промежутке $[-\pi;\ 0]$ симметричным отражением построенной части синусоиды относительно начала координат (рис. 456).

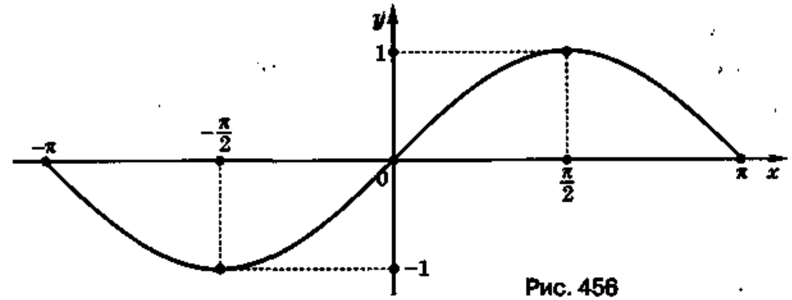


Рис. 456

Мы построили синусоиду на промежутке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π, равной периоду синуса. Это позволяет теперь получить график синуса на всей координатной прямой параллельными переносами построенной кривой (рис. 457).

Теорема 4. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство. Найдем приращение Δy функции $y = \sin x$, соответствующее приращению аргумента Δx, а затем отношение приращений функции и аргумента:

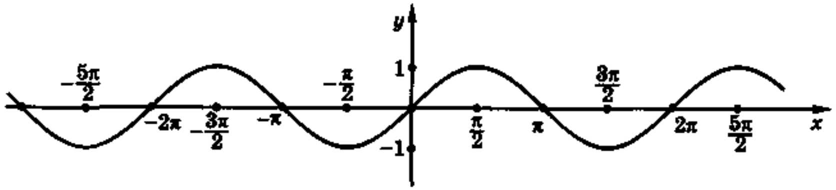


Рис. 457

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Значит,

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Если Δx стремится к нулю, то $\frac{\Delta x}{2}$ также стремится к нулю, а $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ стремится к $\cos x$.

Значение выражения $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ стремится к единице, когда Δx стремится к нулю. Убедимся в этом, используя геометрические соображения. Пусть центральный угол величиной в Δx радиан опирается на дугу AB окружности с радиусом R (рис. 458). Тогда длина этой дуги равна $2R\cdot\frac{\Delta x}{2}$, а длина хорды AB, стягивающей эту дугу, — $2R\sin\frac{\Delta x}{2}$. Поэтому

$$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{2R\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{2R\cdot\frac{\Delta x}{2}} = \frac{AB}{\smile AB}.$$

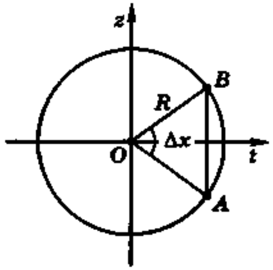


Рис. 458

Если Δx стремится к нулю, то длина хорды AB приближается к длине дуги AB, а, значит, их отношение приближается к единице.

Таким образом,

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$
$$= 1\cdot\cos x = \cos x.$$

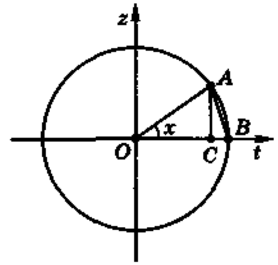


Рис. 459

▶ **Теорема 5.** $|\sin x| < |x|$ ***при любых значениях переменной*** x***, отличных от нуля, и*** $\sin x \approx x$ ***при значениях переменной*** x***, близких к нулю.***

Доказательство. Пусть центральный угол AOB единичной окружности равен x (рис. 459). Из конца A радиуса OA опустим перпендикуляр AC на другой радиус OB. Тогда $\sin x = AC$. Вместе с этим $AC < AB < \smile AB$, а $\smile AB = x$, так как радиус окружности равен 1. Значит, если $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x$.

Поскольку синус — нечетная функция, то $x < \sin x$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$. Значит, если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$, то $|\sin x| < |x|$.

Если $x = 0$, то $|\sin x| = |x|$.

Таким образом, если $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $x \neq 0$, то неравенство $|\sin x| < |x|$ доказано.

Пусть $|x| > \frac{\pi}{2}$. Тогда, учитывая, что $|\sin x| \leqslant 1$, а $\frac{\pi}{2} > 1$, получим, что $|\sin x| < |x|$ и при этих значениях переменной x.

Убедимся в истинности второй части утверждения теоремы. Поскольку $\sin x = AC$ и $x = \smile AB$, то при приближении значения переменной x к нулю длины отрезка AC и дуги AB приближаются друг к другу, а это и означает, что $\sin x \approx x$. ◀

Теперь рассмотрим функцию, обратную синусу. В параграфе 15 мы назвали арксинусом числа a такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Функция, которая задается формулой $y = \arcsin x$, где x — аргумент, называется **арксинусом**.

Теорема 6. ***Функция*** $y = \arcsin x$ ***имеет следующие свойства:***

а) областью определения является промежуток $[-1; 1]$;

б) областью значений является промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) является нечетной;

г) возрастает на $[-1; 1]$;

д) график симметричен относительно прямой $y = x$ ***части графика синуса на промежутке*** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

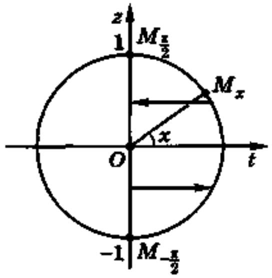


Рис. 460

Доказательство. *а)* и *б)* Проектирование вдоль оси абсцисс устанавливает взаимно однозначное соответствие между отрезком $M_{-\frac{\pi}{2}}M_{\frac{\pi}{2}}$, который представляет числа промежутка $[-1;\ 1]$ оси синусов, и дугой $M_{-\frac{\pi}{2}}M_{\frac{\pi}{2}}$ тригонометрической окружности, которая представляет числа промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 460). А это означает, что областью определения функции $y = \arcsin x$ является промежуток $[-1;\ 1]$, а областью значений — промежуток $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

в) В соответствии с теоремой 7 параграфа 15 для чисел из промежутка $[-1;\ 1]$ истинно равенство $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, а это означает, что функция $y = \arcsin x$ является нечетной.

г) Пусть числа x_1 и x_2 принадлежат промежутку $[-1;\ 1]$ и $x_1 < x_2$. Докажем, что $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$. Допустим, что $\arcsin x_1 \geqslant \arcsin x_2$. Учитывая, что числа $\arcsin x_1$ и $\arcsin x_2$ оба принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция синус возрастает, получим, что $\sin(\arcsin x_1) \geqslant \sin(\arcsin x_2)$, или $x_1 \geqslant x_2$. Но это противоречит условию.

д) Пусть точка $K(a;\ b)$ принадлежит графику функции синус, причем число a принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Это значит, что $\sin a = b$. Но в этом случае $a = \arcsin b$. Это означает, что точка $N(b;\ a)$ принадлежит графику функции арксинус (рис. 461).

График функции $y = \arcsin x$ представлен на рисунке 462.

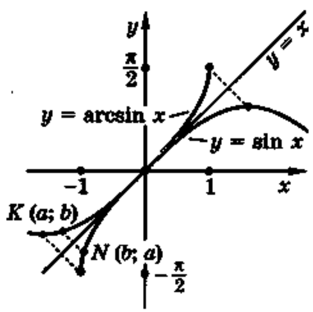


Рис. 461

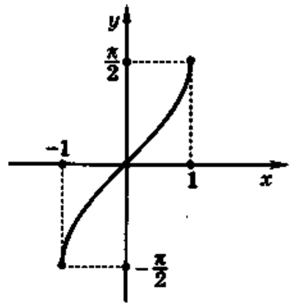


Рис. 462

1. Какую зависимость называют функцией?
2. Какое множество называют областью определения функции; областью значений функции?
3. Какая функция называется возрастающей на множестве K; убывающей на множестве K?
4. Какую функцию называют четной; нечетной?
5. Какую функцию называют периодической? Какое число называют периодом функции?
6. Какое множество является областью определения синуса; областью значений синуса?
7. Какое число является периодом синуса?
8. Какой зависимостью связаны значения синуса для противоположных значений аргумента?
9. На каких промежутках синус возрастает; на каких убывает?
10. При каких значениях аргумента синус принимает нулевое значение?
11. Какая функция является производной синуса?
12. Каким неравенством связаны значения функций $y = \sin x$ и $y = x$?
13. Как связаны значения функций $y = \sin x$ и $y = x$ при близких к нулю значениях переменной x?
14. Какое множество является областью определения арксинуса; областью значений арксинуса?
15. Какой зависимостью связаны значения арксинуса для противоположных значений аргумента?
16. Как по отношению друг к другу расположены графики арксинуса и синуса?

1093. Начертите единичную окружность, отметьте на ней точку, соответствующую указанному числу, и запишите ее координаты:

а) 0; в) π; д) 2π; ж) $\frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{3\pi}{2}$; е) $\frac{\pi}{4}$; з) $-\frac{\pi}{4}$.

1094. По рисунку 463 запишите формулой все числа, которые соответствуют точке:

а) $M_{\frac{\pi}{4}}$; д) $M_{-\frac{5\pi}{2}}$;

б) $M_{\frac{\pi}{2}}$; е) $M_{-\frac{5\pi}{6}}$;

в) $M_{\frac{4\pi}{3}}$; ж) $M_{\frac{3\pi}{2}}$;

г) M_{π}; з) $M_{-\frac{\pi}{4}}$.

1095. Запишите синус числа:

а) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{3}$; д) $\frac{2\pi}{3}$;

б) $-\frac{\pi}{6}$; г) $-\frac{\pi}{3}$; е) $-\frac{2\pi}{3}$;

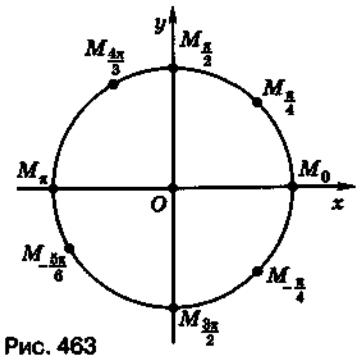


Рис. 463

ж) $\frac{5\pi}{6}$; з) $-\frac{5\pi}{6}$; и) $\frac{7\pi}{6}$; к) $-\frac{7\pi}{6}$.

1096. Запишите синус числа:

а) 0; в) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{4}$; ж) $\frac{3\pi}{4}$; и) $\frac{5\pi}{4}$;

б) $-\pi$; г) $-\frac{\pi}{2}$; е) $-\frac{\pi}{4}$; з) $-\frac{3\pi}{4}$; к) $-\frac{5\pi}{4}$.

1097. Определите, какой знак имеет значение функции $y = \sin x$ при значении переменной x, равном:

а) $\frac{7\pi}{4}$; в) $-\frac{3}{4}\pi$; д) $\frac{5\pi}{6}$; ж) $-\frac{4\pi}{3}$; и) $-\frac{5\pi}{3}$; л) 3;

б) $\frac{5\pi}{4}$; г) $\frac{7\pi}{6}$; е) $\frac{11\pi}{6}$; з) $\frac{10\pi}{3}$; к) 2; м) 4.

1098. Используя график функции, приведенный на рисунке 464, и ее свойства, определите, как изменяется значение функции $y = \sin x$, когда аргумент изменяется:

а) от 0 до π; в) от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$;

б) от $-\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$; г) от $\frac{3\pi}{2}$ до 3π.

1099. Используя график функции $y = \sin x$, приведенный на рисунке 464, определите, что больше:

а) $\sin 0{,}5$ или $\sin 1$; г) $\sin(\pi - 1)$ или $\sin 1$;

б) $\sin(-0{,}2)$ или $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\sin\frac{\pi}{3}$ или $\sin 1$;

в) $\sin 2$ или $\sin 3$; е) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ или $\sin 1$.

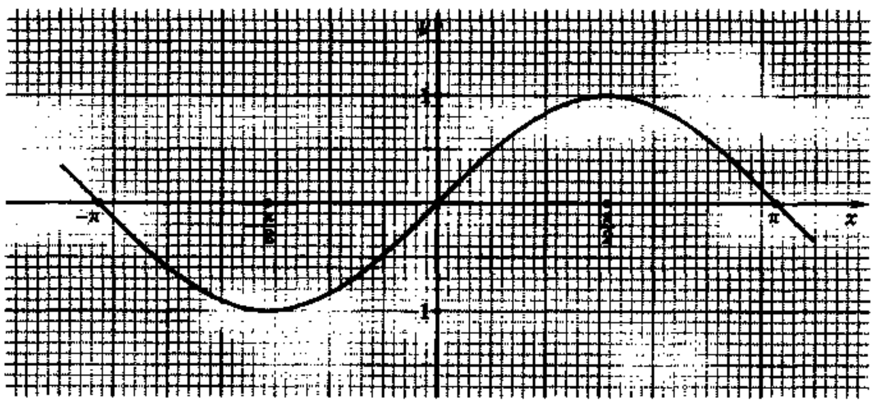


Рис. 464

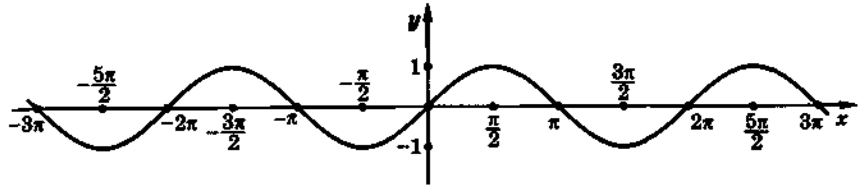


Рис. 465

1100. Используя рисунок 465, на котором приведен график функции $y = \sin x$, запишите:

а) 3 точки максимума; б) 3 точки минимума.

1101. По рисунку 464 найдите значение синуса для аргумента x, равного:

а) 1; в) 2; д) 3; ж) 1,5; и) 2,8;

б) −1; г) −2; е) −3; з) −1,5; к) −2,8.

1102. Используя график функции $y = \sin x$, приведенный на рисунке 464, и ее свойства, определите, в скольких точках пересекает синусоиду график функции:

а) $y = x$; д) $y = 2x$; и) $y = x^3$;

б) $y = -x$; е) $y = -2x$; к) $y = -x^3$;

в) $y = \frac{1}{2}x$; ж) $y = x^2$; л) $y = \sqrt{x}$;

г) $y = -\frac{1}{2}x$; з) $y = -x^2$; м) $y = -\sqrt{x}$.

1103. Запишите множество значений функции $y = \sin x$, учитывая, что значение аргумента x принадлежит множеству:

а) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$; д) $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}\right]$;

б) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right]$; е) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

1104. Используя синусоиду, изображенную на рисунке 464, и свойства синуса, на промежутке $[-\pi; \pi]$ решите уравнение:

а) $\sin x = -1$; в) $\sin x = 0{,}4$; д) $\sin x = \sqrt{2}$;

б) $\sin x = 0{,}7$; г) $\sin x = -0{,}4$; е) $\sin x = -\sqrt{3}$.

1105. Используя график функции $y = \sin x$, приведенный на рисунке 464, и ее свойства, укажите значение аргумента, при котором синус равен $\frac{1}{2}$, а аргумент принадлежит промежутку:

а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

1106. Докажите, что истинно равенство:

а) $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{25\pi}{6}$; д) $\sin(x - \pi) = \sin(x + \pi)$;

б) $\sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; е) $\sin(2x + 2\pi) = \sin(2x - 8\pi)$;

в) $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{32\pi}{5}$; ж) $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$;

г) $\sin\frac{11\pi}{4} = \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; з) $\sin(7\pi - t) = \sin(3\pi - t)$.

1107. Используя графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$, приведенные на рисунке 466, укажите два промежутка, на которых:
а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $\sin x < \frac{1}{2}$; в) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$; г) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$.

1108. Найдите значение функции $y = \arcsin x$ при значении аргумента x, равном:

а) -1; г) $\frac{1}{2}$; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) 0; д) $-\frac{1}{2}$; з) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) 1; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1109. Используя микрокалькулятор или таблицы, найдите значение функции $y = \sin x$ при значении аргумента x, равном:

а) 0,3284; г) −2,346; ж) 145,8; к) −1988;
б) −0,3284; д) 13,45; з) −946,3; л) 0,002984;
в) 14,894; е) −18,42; и) 5472; м) 0,02845.

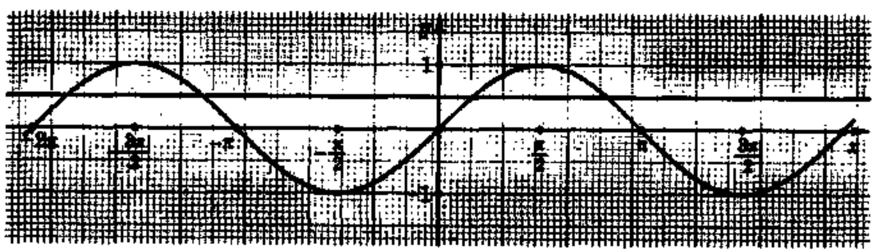


Рис. 466

1110. Используя микрокалькулятор или таблицы, найдите значение функции $y = \arcsin x$ при значении аргумента x, равном:

а) 0,9248; в) 0,1898; д) 0,9888; ж) −0,2004;
б) −0,9248; г) −0,004354; е) −0,1111; з) −0,6831.

1111. На промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ решите уравнение:

а) $\sin x = 0$; г) $\sin x = 1$; ж) $\sin x = -\frac{1}{2}$;

б) $\sin x = \frac{1}{2}$; д) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\sin x = -1$; и) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1112. На промежутке $[-\pi; \pi]$ решите неравенство:

а) $\sin x > \frac{1}{2}$; д) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$; е) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; к) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin x < -\frac{1}{2}$; ж) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; л) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$; з) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; м) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1113. На прямых m и n, которые перпендикулярны плоскости и пересекают ее в точках M и N, взяты такие точки K и L, что $KM = 27$ см, $LN = 48$ см. Найдите отрезок KL, учитывая, что $MN = 29$ см.

1114. Из точки A к плоскости проведен перпендикуляр AB и наклонные AC и AD, проекции которых перпендикулярны друг другу. Найдите высоту CG треугольника ACD, учитывая, что $AB = 45$ см, $BC = 48$ см, $BD = 60$ см.

1115. Из точки к плоскости проведены две наклонные длинами 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, учитывая, что проекции относятся как 2 : 3.

1116. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α, а основание BC отстоит от нее на 20 см (рис. 467). Найдите расстояние от

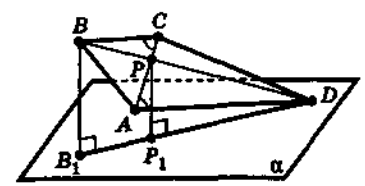


Рис. 467

точки P пересечения диагоналей трапеции до плоскости α, учитывая, что $AD : BC = 7 : 3$.

1117. Точка D лежит на прямой, проходящей через вершину B треугольника ABC и перпендикулярной его плоскости. Учитывая, что $BD = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = BA = 13$ см, найдите:

а) расстояние от точки D до прямой AC;
б) площадь треугольника ACD.

1118. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC с катетами CB и CA, равными 20 см и 30 см, возведен перпендикуляр CD к плоскости треугольника длиной 10 см. Найдите площадь треугольника ABD.

1119. На отрезке AB выбрана точка T, и на полученных отрезках-частях TA и TB как на образующих построены такие конусы, что их боковые поверхности равны 195π см^2 и 45π см^2, а радиус основания первого конуса на 8 см больше. Когда на отрезке A_1B_1, равном отрезку AB, как на образующей построили третий конус с боковой поверхностью 240π см^2, то радиус его основания оказался равным 10 см (рис. 468). Учитывая, что боковая поверхность $S_б$ конуса с радиусом основания r и образующей l определяется формулой $S_б = \pi rl$, найдите:

а) образующие и радиусы оснований конусов;
б) полные поверхности конусов;
в) высоты конусов, т. е. перпендикуляры, опущенные из вершин конусов на их основания.

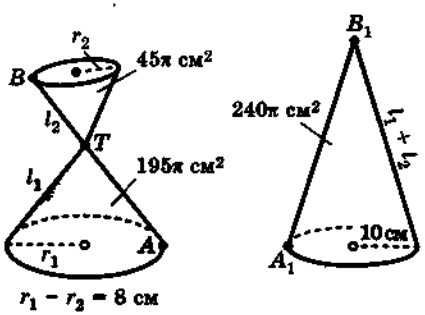


Рис. 468

1120. На отрезке MN выбрана точка A, и на полученных отрезках-частях AM и AN как на диаметрах оснований построены такие конусы, что их боковые поверхности равны 60π см^2 и 180π см^2, а образующая первого конуса на 10 см меньше. Когда на отрезке MN как на диаметре основания построили третий конус с боковой поверхностью 240π см^2, то его образующая оказалась равной 16 см (рис. 469). Найдите:

а) образующие и радиусы оснований конусов;
б) полные поверхности конусов;
в) высоты конусов.

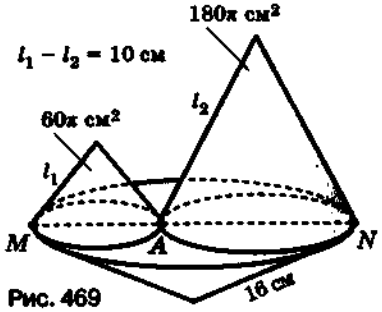


Рис. 469

* * *

1121. Докажите, что если многогранник имеет В вершин, Р ребер и Г граней и каждая грань имеет с шаром единственную общую точку, то В − Р + Г = 2.

1122. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы B и D прямые, стороны AB и BC равны и расстояние от точки B до прямой AD равно d. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

1123. Найдите количество и сумму цифр в десятичной записи произведения $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdot \ldots \cdot 99\ldots9$, учитывая, что в каждом следующем множителе количество цифр вдвое больше, чем в предыдущем, а в последнем их 2^{2008}.

22. Функции косинус и арккосинус

В соответствии с определением косинусом числа x называется косинус угла, равного x радиан.

Функция, заданная формулой $y = \cos x$, где x — аргумент, называется косинусом.

Теорема 7. ***Функция $y = \cos x$ имеет следующие свойства:***

а) областью определения является множество R всех действительных чисел;

б) областью значений является промежуток $[-1; 1]$;

в) является четной;

г) является периодической, причем наименьшим положительным периодом является число 2π;

д) $(\cos x)' = -\sin x$;

е) возрастает от −1 до 1 на промежутках $[-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi]$ и убывает от 1 до −1 на промежутках $[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$, где k — любое целое число.

Доказательство. Свойства *а*), *б*) и *в*) обосновываются так же, как и соответствующие свойства синуса.

г) Поскольку $\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x + 2\pi)$, то число 2π является периодом косинуса. Это наименьший положительный период. Действительно, если двигаться по единичной окружности от точки M_0 в положительном направлении, то ближайшей точкой с абсциссой 1 будет эта же точка M_0, для чего придется пройти путь длиной 2π.

д) Учитывая, что $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, и то, что $(\sin x)' = \cos x$, получим:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' =$$
$$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -\sin x.$$

е) На промежутке $(-\pi; 0)$ $\sin x < 0$, поэтому $(\cos x)' = -\sin x > 0$. Значит, на этом промежутке функция косинус возрастает. На промежутке $(0; \pi)$ $\sin x > 0$, поэтому $(\cos x)' = -\sin x < 0$, и, значит, на этом промежутке функция косинус убывает.

Это свойство мы усматриваем и из рисунков 470 и 471. При этом в положениях $M_{-\frac{\pi}{2}}$ и $M_{\frac{\pi}{2}}$ ордината становится равной нулю (рис. 472).

Теперь учтем, что периодом функции $y = \cos x$ является число 2π. Это позволяет утверждать, что на любом из промежутков $[-\pi + 2k\pi;\ 0 + 2k\pi]$ функция $y = \cos x$ возрастает от -1 до 1, а на любом из промежутков $[0 + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi]$ убывает от 1 до -1.

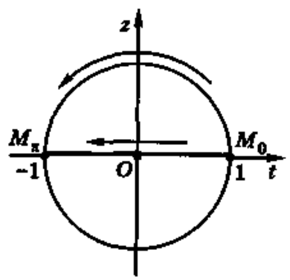


Рис. 470

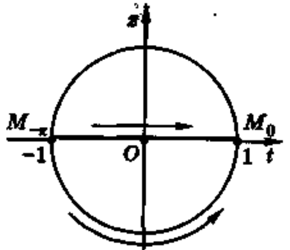


Рис. 471

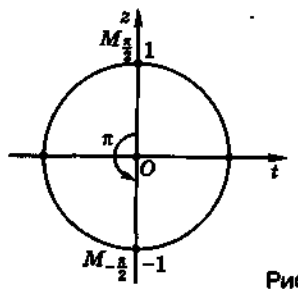


Рис. 472

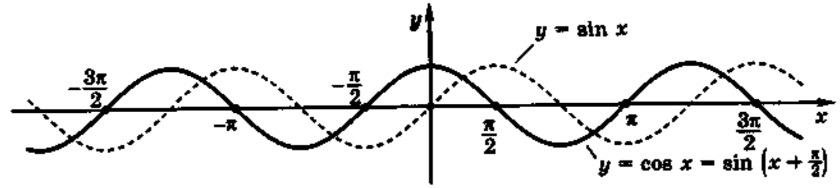


Рис. 473

Установленных свойств достаточно, чтобы построить график косинуса. Его можно получить и из таких соображений. Обратим внимание на то, что при любом значении переменной x истинно равенство $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Оно показывает, что график функции $y = \cos x$ получается из графика функции $y = \sin x$ сдвигом вдоль оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 473).

На графике косинуса, изображенном на рисунке 474, легко усматриваются уже доказанные и другие свойства функции $y = \cos x$.

▶ **Теорема 8.** ***При значениях переменной x, близких к нулю, истинно приближенное равенство*** $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, ***причем*** $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, ***если*** $x \neq 0$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 5 $\sin x \approx x$ при близких к нулю значениях x. Поскольку $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, то $\cos x \approx \sqrt{1 - x^2}$. Теперь к функции $f(t) = \sqrt{1 + t}$ применим приближенную формулу $f(t_0 + t) \approx f(t_0) + f'(t_0)\, t$, установленную в параграфе 7. Имеем $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1 + t}}$. Пусть $t_0 = 0$. Тогда $f(t_0) = 1$ и $f'(t_0) = \frac{1}{2}$. Поэтому при близких к нулю значениях t истинно приближенное равенство $\sqrt{1 + t} \approx 1 + \frac{t}{2}$. При значении $t_0 = -x^2$ получаем $\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Значит, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

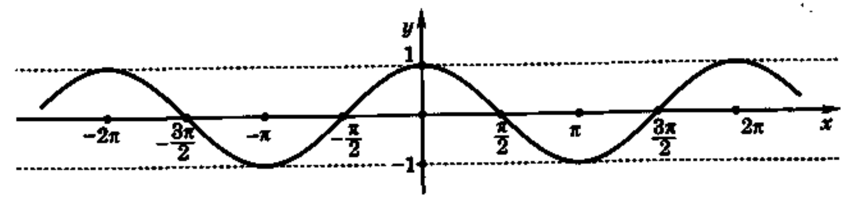


Рис. 474

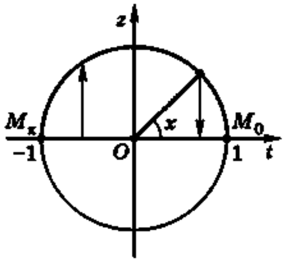


Рис. 475

Для доказательства неравенства $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ рассмотрим функцию $g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$. Найдем производную этой функции: $g'(x) = -\sin x + x$, $g(0) = 0$. В соответствии с теоремой 5, если $x < 0$, то $\sin x > x$, а если $x > 0$, то $\sin x < x$. Поэтому $g'(x) < 0$, если $x < 0$ и $g'(x) > 0$, если $x > 0$. Это означает, что функция $g(x)$ при $x < 0$ убывает, а при $x > 0$ возрастает. Поэтому в точке $x = 0$ она принимает свое наименьшее значение, которое равно нулю. Получается, что $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) > 0$ при $x \neq 0$, т. е. если $x \neq 0$, то $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$. ◀

Теперь рассмотрим функцию, обратную косинусу.

Функция, которая задается формулой $y = \arccos x$, где x — аргумент, называется **арккосинусом**.

Теорема 9. ***Функция*** $y = \arccos x$ ***имеет следующие свойства:***

а) областью определения является промежуток $[-1; 1]$;

б) областью значений является промежуток $[0; \pi]$;

в) не является ни четной, ни нечетной;

г) является убывающей;

д) график арккосинуса симметричен относительно прямой $y = x$ ***части графика косинуса на промежутке*** $[0; \pi]$.

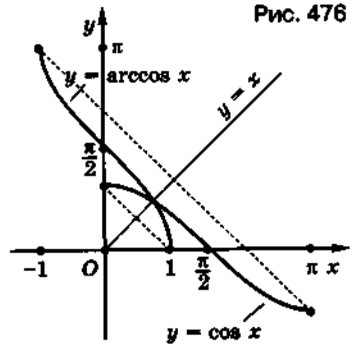
Доказательство. *а)* и *б)* Проектирование вдоль оси ординат устанавливает взаимно однозначное соответствие между отрезком M_0M_π, который представляет числа промежутка $[-1; 1]$ оси косинусов, и дугой M_0M_π тригонометрической окружности, которая представляет числа промежутка $[0; \pi]$ (рис. 475). А это означает, что областью определения функции $y = \arccos x$ является промежуток $[-1; 1]$, а областью значений — промежуток $[0; \pi]$.

в) Поскольку $\arccos(-1) = \pi$ и $\arccos 1 = 0$, то $\arccos(-1) \neq \arccos 1$ и $\arccos(-1) \neq -\arccos 1$. Поэтому функция арккосинус не может быть четной и не может быть нечетной.

Свойства *г)* и *д)* доказываются аналогично свойствам *г)* и *д)* теоремы 6. Проведите эти доказательства самостоятельно. Рисунок 476 иллюстрирует свойство *д)*.

График арккосинуса представлен на рисунке 477.

Рис. 476



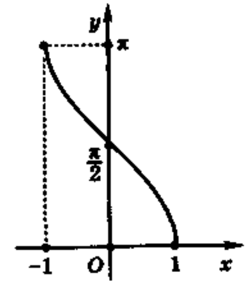


Рис. 477

Пример 1. Докажем, что $\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{\pi}{4}$.

Поскольку $\frac{2}{\sqrt{13}} > 0$ и $\frac{5}{\sqrt{26}} > 0$, то с учетом определений арксинуса и арккосинуса соответственно выражения $\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$ и $\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}$ представляют такие числа x и y, что:

$$\sin x = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ и } 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad \cos y = \frac{5}{\sqrt{26}} \text{ и } 0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

Сложив почленно неравенства $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $0 < y < \frac{\pi}{2}$, получим, что число $x + y$ удовлетворяет условию:

$$0 < x + y < \pi.$$

На промежутке $[0; \pi]$ косинус убывает, т. е. каждое свое значение принимает только один раз. Это позволяет однозначно по значению косинуса указать значение его аргумента. Поэтому найдем сначала $\cos(x + y)$, а затем и $x + y$:

$$\cos(x + y) = \cos\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right) =$$

$$= \cos\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \cos\left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right) - \sin\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \sin\left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right) =$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}\right)} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right)} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит,

$$x + y = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{\pi}{4},$$

что и требовалось доказать.

? 1. Какое множество является областью определения косинуса; областью значений косинуса?
2. Какое число является периодом косинуса?
3. Какой зависимостью связаны значения косинуса для противоположных значений аргумента?
4. На каких промежутках косинус возрастает; на каких убывает?
5. При каких значениях аргумента косинус принимает нулевое значение?
6. Какая функция является производной косинуса?
7. Как называется функция, обратная косинусу?
8. Как можно приближенно вычислять значения косинуса для аргументов, близких к нулю?
9. Какое множество является областью определения арккосинуса; областью значений арккосинуса?
10. Какой зависимостью связаны значения арккосинуса для противоположных значений аргумента?
11. Как по отношению друг к другу расположены графики арккосинуса и косинуса на промежутке $[0;\ \pi]$?

1124. Начертите тригонометрическую окружность, отметьте на ней точку, соответствующую числу, и запишите ее координаты:

а) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{2\pi}{3}$; ж) $\frac{5\pi}{6}$;

б) $-\frac{\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{2\pi}{3}$; з) $-\frac{7\pi}{6}$.

1125. Используя график функции, приведенный на рисунке 478, и ее свойства, определите, как изменяется значение функции $y = \cos x$, когда аргумент изменяется:

а) от 0 до π; в) от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$;

б) от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$; г) от $\frac{3\pi}{2}$ до 3π.

1126. Используя график функции $y = \cos x$ и ее свойства, найдите значение функции при значении аргумента x, равном:

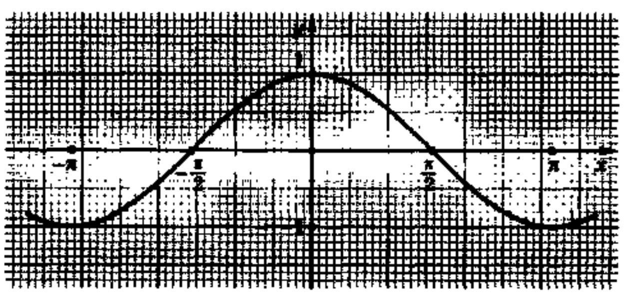


Рис. 478

а) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{3\pi}{2}$; ж) -17π;

б) $\frac{3\pi}{2}$; д) 6π; з) 24π.

в) $-\frac{\pi}{2}$; е) -6π;

1127. Запишите косинус числа:

а) 0; д) $\frac{\pi}{6}$; и) $\frac{3\pi}{4}$; н) $\frac{7\pi}{6}$;

б) $-\pi$; е) $-\frac{\pi}{6}$; к) $-\frac{3\pi}{4}$; о) $-\frac{7\pi}{6}$;

в) $\frac{\pi}{2}$; ж) $\frac{\pi}{3}$; л) $\frac{5\pi}{6}$; п) $\frac{5\pi}{4}$;

г) $-\frac{\pi}{2}$; з) $-\frac{\pi}{3}$; м) $-\frac{5\pi}{6}$; р) $-\frac{5\pi}{4}$.

1128. Используя график функции $y = \cos x$, приведенный на рисунке 478, и ее свойства, определите количество точек его пересечения с графиком функции:

а) $y = x$; в) $y = 2x$; д) $y = x^3$;

б) $y = -\frac{1}{2}x$; г) $y = -x^2$; е) $y = -\sqrt{x}$.

1129. Определите, истинно ли равенство:

а) $\cos(x - \pi) = \cos(x + \pi)$; д) $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{25\pi}{6}$;

б) $\cos(2x + 2\pi) = \cos(2x - 8\pi)$; е) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;

в) $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; ж) $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{32\pi}{5}$;

г) $\cos(7\pi - t) = \cos(3\pi - t)$; з) $\cos\frac{11\pi}{4} = \cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.

1130. Определите, какой знак имеет значение функции $y = \cos x$ при значении переменной x, равном:

а) $\frac{7\pi}{9}$; в) $\frac{91\pi}{36}$; д) $-\frac{21\pi}{4}$; ж) $\frac{631\pi}{12}$;

б) $\frac{71\pi}{36}$; г) $\frac{13\pi}{5}$; е) $\frac{11\pi}{7}$; з) $-\frac{1024\pi}{7}$.

1131. Используя график функции $y = \cos x$, приведенный на рисунке 478, определите, что больше:

а) $\cos 0{,}5$ или $\cos 1$; г) $\cos(\pi - 1)$ или $\cos 1$;

б) $\cos(-0{,}2)$ или $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\cos\frac{\pi}{3}$ или $\cos 1$;

в) $\cos 2$ или $\cos 3$; е) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ или $\cos 1$.

1132. Используя возрастание или убывание функции $y=\cos x$, сравните числа:

а) $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$; в) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; д) $\cos 1$ и $\cos 3$;

б) $\cos\frac{8\pi}{7}$ и $\cos\frac{10\pi}{7}$; г) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$; е) $\cos 4$ и $\cos 5$.

1133. Используя формулы приведения, позволяющие синус выразить через косинус, сравните числа:

а) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$; в) $\cos\frac{5\pi}{8}$ и $\sin\frac{5\pi}{8}$; д) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{14}$;

б) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$; г) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{3\pi}{5}$; е) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$.

1134. Запишите множество значений функции $y=\cos x$, учитывая, что значения аргумента x принадлежат множеству:

а) $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$; д) $\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{2\pi}{3}\right]$;

б) $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{7\pi}{4};-\frac{5\pi}{4}\right]$; е) $\left[\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$.

1135. Используя графики функций $y=\cos x$ и $y=\frac{1}{2}$, приведенные на рисунке 479, укажите два промежутка, на которых:

а) $\cos x>\frac{1}{2}$; в) $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$;

б) $\cos x<\frac{1}{2}$; г) $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$.

1136. Используя рисунок 480, на котором приведен график функции $y=\cos x$, запишите формулу, представляющую все точки:

а) максимума; б) минимума.

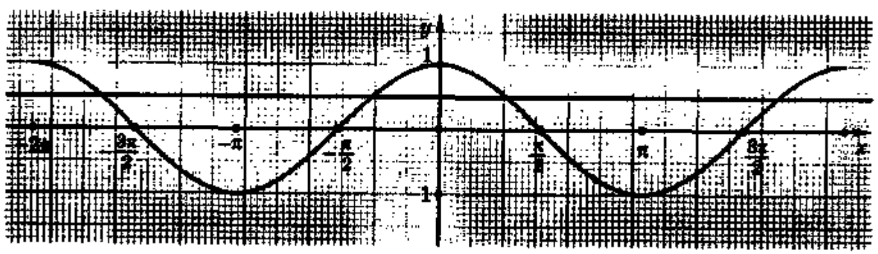


Рис. 479

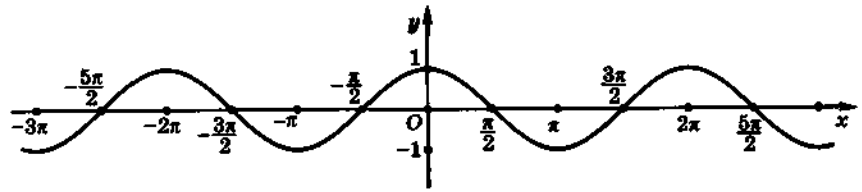


Рис. 480

1137. Используя рисунок 480, на котором представлен график функции $y=\cos x$, запишите три промежутка, на которых косинус:

а) положителен; б) отрицателен;

в) неположителен; г) неотрицателен.

1138. По рисунку 478 найдите значение косинуса для аргумента x, равного:

а) 1; г) −2; ж) −1,5;

б) 2; д) −3; з) 2,7;

в) 3; е) 1,5; и) −2,7.

1139. Используя микрокалькулятор, найдите значение функции $y=\cos x$ при значении аргумента x, равном:

а) 0,3284; г) −2,346; ж) 145,8; к) −1988;

б) −0,3284; д) 13,45; з) −946,3; л) 0,002984;

в) 14,894; е) −18,42; и) 5472; м) 0,02845.

1140. Найдите значение функции $y=\arccos x$ при значении аргумента x, равном:

а) −1; г) $\frac{1}{2}$; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) 0; д) $-\frac{1}{2}$; з) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) 1; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1141. Используя график функции $y=\arccos x$, представленный на рисунке 481, найдите значение функции $y=\arccos x$ при значении аргумента x, равном:

а) 0,6; в) 0,3; д) 0,1;

б) −0,6; г) −0,3; е) −0,1.

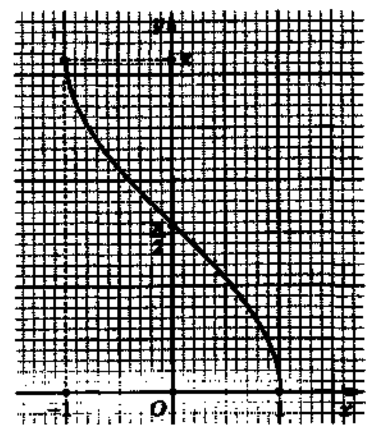


Рис. 481

1142. Используя микрокалькулятор, найдите значение функции $y = \arccos x$ при значении аргумента x, равном:

а) 0,9248; в) 0,1898; д) 0,9888; ж) –0,2004;
б) –0,9248; г) –0,004354; е) –0,1111; з) –0,6831.

1143. Учитывая, что при использовании приближенного равенства $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ для чисел, модули которых не превышают 1, относительная погрешность меньше $5x^3\,\%$, найдите приближенное значение косинуса числа и оцените погрешность вычисления:

а) 0,01; б) 0,05; в) 0,1; г) 0,5.

1144. На промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ решите уравнение:

а) $\cos x = 0$; г) $\cos x = 1$; ж) $\cos x = -\frac{1}{2}$;
б) $\cos x = \frac{1}{2}$; д) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\cos x = -1$; и) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1145. Докажите, что функция $y = \arccos x$ является убывающей.

1146. Докажите, что график функции $y = \arccos x$ симметричен относительно прямой $y = x$ части графика функции $y = \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$.

1147. Докажите, что истинно равенство:

а) $2 \arcsin \frac{2}{7} = \arccos \frac{41}{49}$;
б) $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\pi}{4}$;
в) $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$;
г) $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$;
д) $\arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7} = \arccos \left(-\frac{11}{14}\right)$;
е) $\arcsin 0{,}6 - \arcsin 0{,}8 = -\arcsin 0{,}28$;
ж) $\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \arccos \frac{2}{11}$;
з) $\arccos \left(-\frac{3}{4}\right) = \arcsin \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}$.

1148. Решите уравнение:

а) $\arcsin x = 2 \arcsin a$; в) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + \arcsin a$;
б) $\arccos x = 2 \arcsin a$; г) $\arccos x = \arcsin 2a$.

1149. В прямоугольном параллелепипеде $KLMNK_1L_1M_1N_1$ его диагонали пересекаются в точке O, а диагонали его основания — в точке Q. Определите, перпендикулярны ли:

а) прямые OQ и KL;
б) прямые KK_1 и LN;
в) прямая OQ и плоскость MNK.

1150. Через центр тяжести G грани QCD треугольной пирамиды $QBCD$, боковое ребро QB которой перпендикулярно основанию BCD, проведена прямая l, перпендикулярная плоскости BCD. Постройте точку пересечения прямой l с плоскостью основания.

1151. Точка T — середина ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которого является квадрат $ABCD$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку T перпендикулярно прямой BD, учитывая, что $AD = a$, $AA_1 = b$.

1152. К плоскости φ из точек A, B, C, которые лежат по одну сторону от φ, проведены три перпендикуляра — AA_1 длиной 1, BB_1 длиной 2, CC_1 длиной 3, основания которых образуют на плоскости φ равносторонний треугольник. Найдите вид треугольника ABC.

1153. Учитывая, что точки R и Q — середины ребер A_1B_1 и A_1C_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с ребром основания 20 и боковым ребром 24, определите:

а) является ли отрезок CQ проекцией отрезка CB_1 на плоскость AA_1C;
б) площадь треугольника BC_1R.

1154. Используя рисунок 482, докажите, что боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания призмы на ее боковое ребро.

1155. Есть две прямые призмы, у которых периметры оснований равны 24 см и 36 см, а боковые ребра относятся как 4 : 5. Чтобы третья прямая призма имела периметр основания

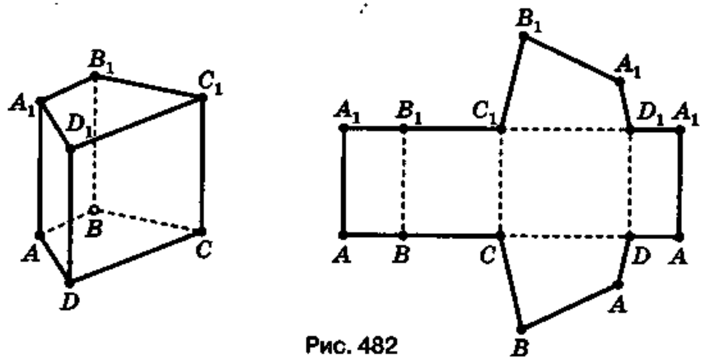


Рис. 482

60 см, а боковая поверхность ее была равной сумме боковых поверхностей первой и второй призм, ее боковое ребро должно быть равным 23 см. Найдите боковые ребра первой и второй призм и их боковые поверхности.

1156. Пути, которые товарный поезд прошел за 3 ч с одной скоростью и за 9 ч — с другой, относятся как 2 : 3. Найдите эти пути и сами скорости, учитывая, что средняя скорость поезда оказалась равной 45 км/ч.

* * *

1157. Решите уравнение $x^2(1+x^2)^2+y^2(1+y^2)^2=8x^2y^2$.

1158. Биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O, причем $OB=OC$. Найдите отрезок AB, учитывая, что $\angle AOB=\alpha$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен R.

1159. Определите, при каких натуральных значениях переменной n точным квадратом является число:

а) 5^n+4^n; б) 5^n-4^n.

23. Функции тангенс и арктангенс, котангенс и арккотангенс

Функция, заданная формулой $y=\operatorname{tg} x$, где x — аргумент, называется **тангенсом**.

Теорема 10. ***Функция $y=\operatorname{tg} x$ имеет следующие свойства:***

а) областью определения является множество R действительных чисел, из которого исключены числа вида $\frac{\pi}{2}+k\pi$, где k — любое целое число;

б) областью значений является множество R всех действительных чисел;

в) является периодической с наименьшим положительным периодом π;

г) является нечетной;

д) $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;

е) возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, где k — целое число.

Доказательство. *а)* В область определения тангенса входят все действительные числа, за исключением тех, которые соответствуют точкам пересечения единичной окружности с осью ординат (рис. 483), т. е. за исключением чисел $\frac{\pi}{2}+k\pi$, где k — целое число.

б) В параграфе **15** доказано, что тангенс числа x равен координате точки N оси тангенсов (рис. 484). Понятно, что любое число оси тангенсов является значением тангенса. Поэтому область значений тангенса есть множество R всех действительных чисел.

в) Поскольку $\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\operatorname{tg} x$, то число π является периодом тангенса. Это наименьший положительный период, так как на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс каждое свое значение принимает только один раз (рис. 485).

г) Свойство следует из равенства $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$, которое даказано в теореме **3** параграфа **13**.

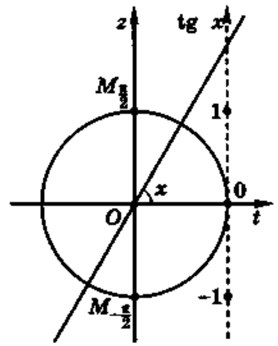


Рис. 483

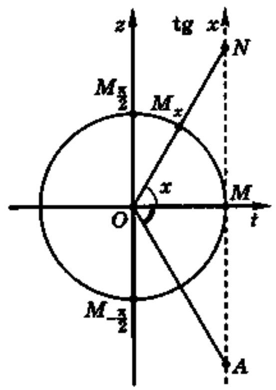


Рис. 484

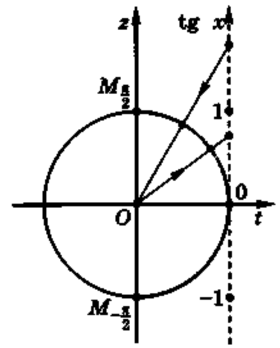


Рис. 485

д) Учитывая, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, и то, что $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, получим:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \cos' x \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

е) Поскольку тангенс — периодическая функция, то достаточно исследовать, как он ведет себя на промежутке длиной, равной периоду π. Удобно в качестве такого промежутка взять промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Как уже установлено, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Но $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$, поэтому на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция тангенс возрастает.

Полученный результат можно усмотреть и из тех соображений, что тангенс любого действительного числа изображается некоторой точкой оси тангенсов (рис. 486). По этому рисунку видно, что если аргумент x возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Учитывая, что периодом функции $y = \operatorname{tg} x$ является число π, можно утверждать, что на любом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Установленные свойства в общих чертах дают представление о поведении тангенса на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Для уточнения хода графика используем геометрическое построение, аналогичное описанному в параграфе 21 при построении графика синуса. Ход этого построения легко усматривается из рисунка 487. С учетом нечетности тангенса,

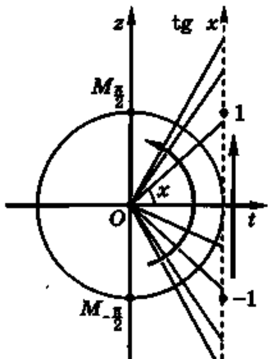


Рис. 486

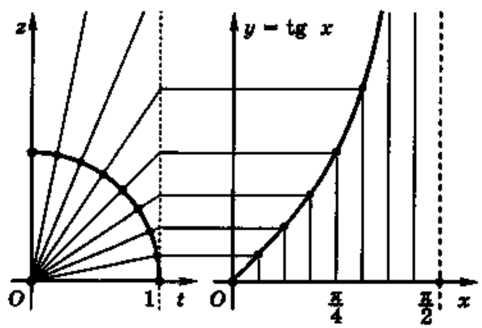


Рис. 487

отразив построенную часть графика относительно начала координат, получим график тангенса на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 488). Учет периодичности тангенса дает его график в области определения (рис. 489).

Теперь рассмотрим функцию, обратную тангенсу.

Функция, которая задается формулой $y = \operatorname{arctg} x$, где x — аргумент, называется **арктангенсом**.

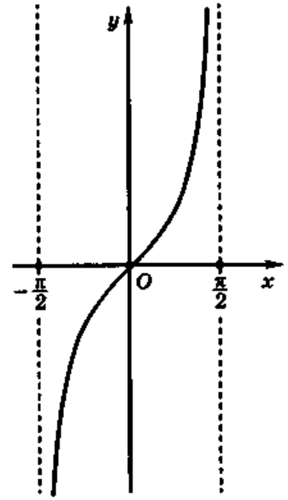


Рис. 488

Теорема 11. ***Функция $y = \operatorname{arctg} x$ имеет следующие свойства:***

а) областью определения является множество R всех действительных чисел;

б) областью значений является промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) является нечетной;

г) является возрастающей;

д) график арктангенса симметричен относительно прямой $y = x$ части графика тангенса на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство. *а)* и *б)* Проектирование из центра O тригонометрической окружности устанавливает взаимно однозначное соответствие между осью тангенсов, которая представляет множество R действительных чисел, и дугой $M_{-\frac{\pi}{2}}M_{\frac{\pi}{2}}$ тригонометрической окружности без концевых точек $M_{-\frac{\pi}{2}}$ и $M_{\frac{\pi}{2}}$, кото-

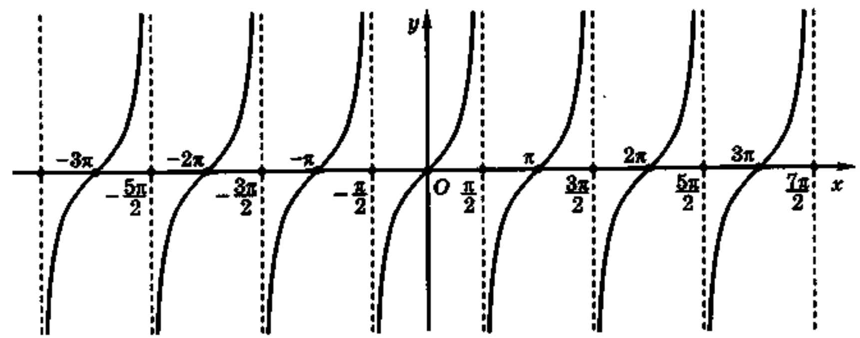


Рис. 489

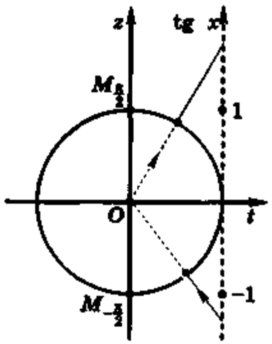


Рис. 490

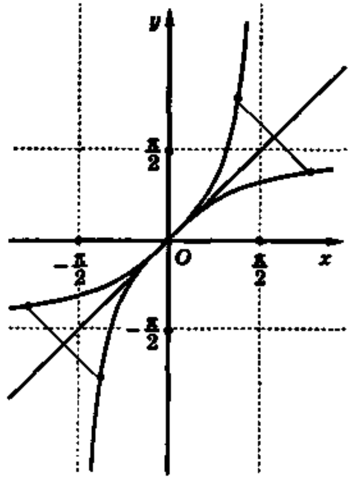


Рис. 491

рая представляет числа промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 490). А это означает, что областью определения функции $y = \operatorname{arctg}\ x$ является множество R действительных чисел, а областью значений — промежуток $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

в) Свойство следует из равенства $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, которое доказано в теореме 7 параграфа 15.

Свойства *г)* и *д)* обосновываются аналогично свойствам *г)* и *д)* теоремы 6. Проведите это обоснование самостоятельно. Рисунок 491 иллюстрирует свойство *д)*.

График арктангенса представлен на рисунке 492.

Функция, заданная формулой $y = \operatorname{ctg} x$, где x — аргумент, называется **котангенсом**.

Теорема 12. ***Функция $y = \operatorname{ctg} x$ имеет следующие свойства:***

а) областью определения является множество R действительных чисел, из которого исключены числа вида $k\pi$, где k — любое целое число;

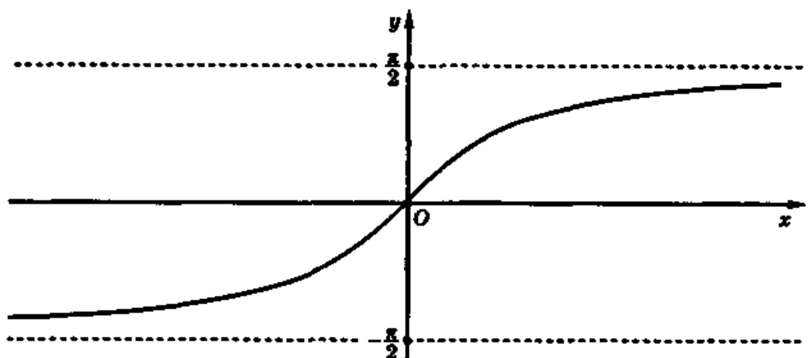


Рис. 492

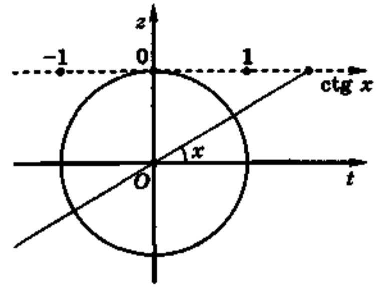


Рис. 493

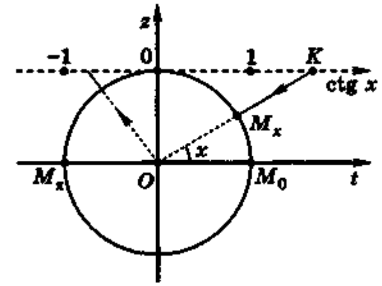


Рис. 494

б) областью значений является множество R всех действительных чисел;

в) является нечетной;

г) является периодической с наименьшим положительным периодом π;

д) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

е) убывает от $+\infty$ до $-\infty$ на каждом из промежутков $(0 + k\pi;\ \pi + k\pi)$, где k — целое число.

Доказательство. *а)* В область определения котангенса входят все действительные числа, за исключением тех, которые соответствуют точкам пересечения единичной окружности с осью ординат (рис. 493), т. е. за исключением чисел $k\pi$, где k — целое число.

б) В параграфе 15 доказано, что котангенс числа x равен координате точки K оси котангенсов (рис. 494). Понятно, что любое число оси котангенсов есть значение котангенса. Поэтому областью значений котангенса является множество R всех действительных чисел.

в) Свойство следует из равенства $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, которое даказано в теореме 3 параграфа 13.

г) Поскольку $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$, то число π является периодом котангенса. Это наименьший положительный период, так как на промежутке $(0;\ \pi)$ котангенс каждое свое значение принимает только один раз (рис. 495).

д) Поскольку $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

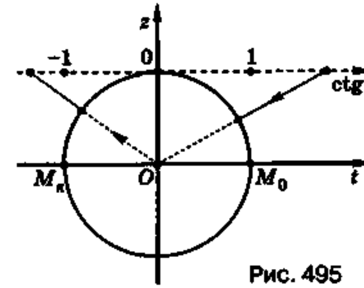


Рис. 495

11 — 2149

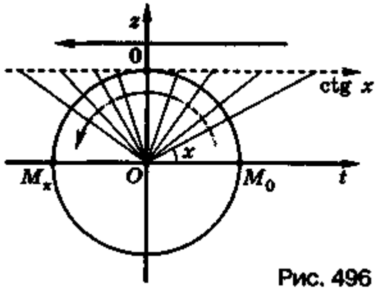


Рис. 496

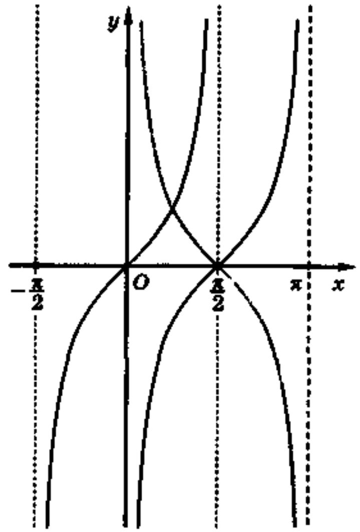


Рис. 497

е) На промежутке $(0; \pi)$ производная котангенса отрицательна, поэтому на этом промежутке котангенс убывает. Учитывая, что периодом функции $y = \mathrm{ctg}\ x$ является число π, можно утверждать, что на любом из промежутков $(0 + \pi k; \pi + \pi k)$, где k — целое число, функция $y = \mathrm{ctg}\ x$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$.

Полученный результат можно усмотреть и из тех соображений, что котангенс любого действительного числа изображается некоторой точкой оси котангенсов (рис. 496). По этому рисунку видно, что если аргумент x возрастает от 0 до π, то $\mathrm{ctg}\ x$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$.

Равенство $\mathrm{ctg}\ x = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ указывает, что график котангенса можно получить из графика тангенса сдвигом тангенсоиды по оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{2}$ и последующим отражением полученного графика относительно оси абсцисс (рис. 497).

График котангенса представлен на рисунке 498.

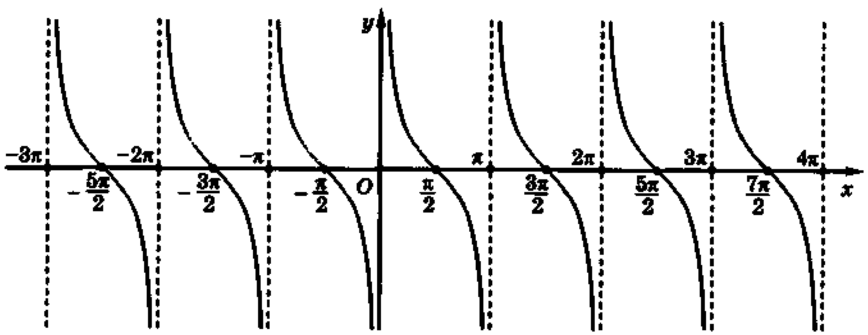


Рис. 498

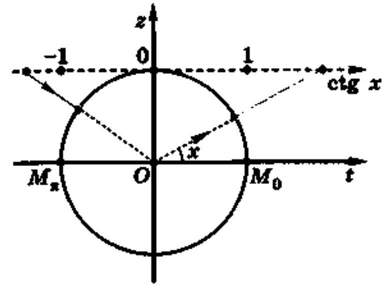


Рис. 499

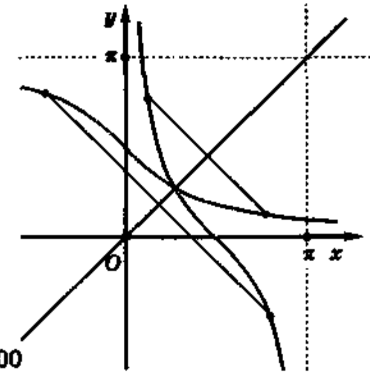


Рис. 500

Наконец рассмотрим функцию, обратную котангенсу.

Функция, которая задается формулой $y = \mathrm{arcctg}\ x$, где x — аргумент, называется **арккотангенсом**.

Теорема 13. ***Функция $y = \mathrm{arcctg}\ x$ имеет следующие свойства:***

а) областью определения является множество R всех действительных чисел;

б) областью значений является промежуток $(0; \pi)$;

в) не является четной и не является нечетной;

г) является убывающей;

д) график арккотангенса симметричен относительно прямой $y = x$ части графика котангенса на промежутке $(0; \pi)$.

Доказательство. ***а)*** и ***б)*** Проектирование из центра O тригонометрической окружности устанавливает взаимно однозначное соответствие между осью котангенсов, которая представляет множество R всех действительных чисел, и дугой M_0M_x тригонометрической окружности, которая представляет числа промежутка $(0; \pi)$ (рис. 499). А это означает, что областью определения функции $y = \mathrm{arcctg}\ x$ является множество R всех действительных чисел, а областью значений — промежуток $(0; \pi)$.

в) Свойство доказывается, как и соответствующее свойство для арккосинуса, установленное в теореме 9 параграфа 22. Проведите это доказательство самостоятельно.

Свойства ***г)*** и ***д)*** обосновываются аналогично свойствам ***г)*** и ***д)*** теоремы 6. Проведите это обоснование самостоятельно. Рисунок 500 иллюстрирует свойство ***д)***.

График арккотангенса представлен на рисунке 501.

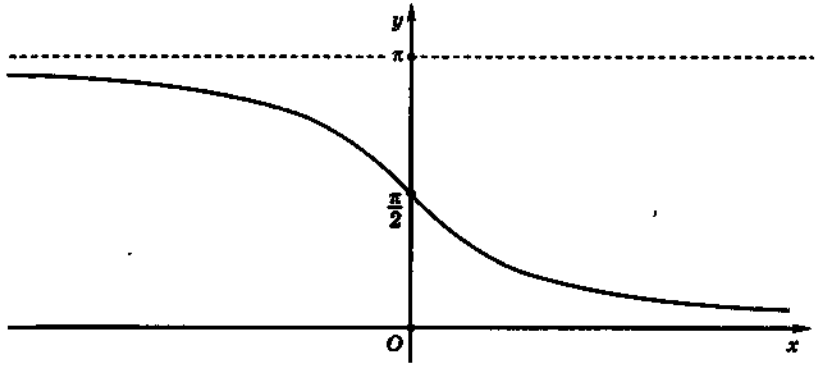


Рис. 501

? 1. Какое множество является областью определения тангенса; котангенса?
2. Какое множество является областью значений тангенса; котангенса?
3. Какое число является периодом тангенса; котангенса?
4. Какой зависимостью для противоположных значений аргумента связаны значения тангенса; котангенса?
5. На каких промежутках тангенс возрастает; на каких убывает?
6. На каких промежутках котангенс возрастает; на каких убывает?
7. Какая функция является производной тангенса; котангенса?
8. Как называется функция, обратная тангенсу; котангенсу?
9. Какое множество является областью определения арктангенса; арккотангенса?
10. Какое множество является областью значений арктангенса; арккотангенса?
11. Какой зависимостью для противоположных значений аргумента связаны значения арктангенса; арккотангенса?
12. Как по отношению друг к другу расположены графики арктангенса и тангенса на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; графики арккотангенса и котангенса на промежутке $(0;\ \pi)$?

1160. Запишите координату точки оси тангенсов, соответствующей числу:

а) 0; б) $\frac{\pi}{4}$; в) π; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) 2π.

1161. Запишите тангенс числа:

а) 0; в) $-\frac{\pi}{4}$; д) $-\frac{\pi}{6}$; ж) $-\frac{\pi}{3}$;
б) $\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{3}$; з) $\frac{5\pi}{6}$.

1162. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$, представленный на рисунке 502, определите, в скольких точках его пересекает график функции:

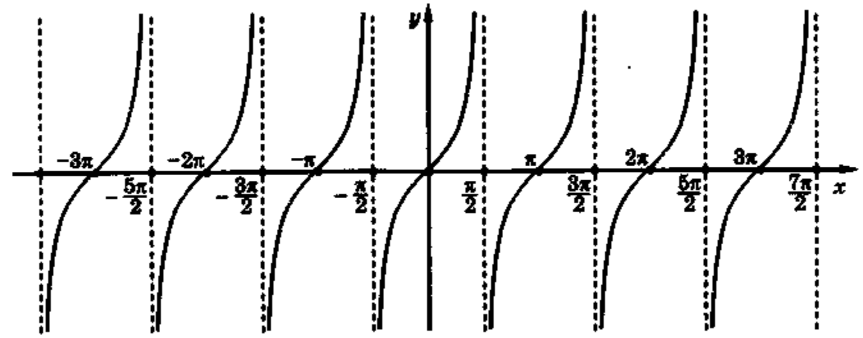


Рис. 502

а) $y = x$; в) $y = -2x$; д) $y = -x^5$;
б) $y = -\frac{1}{2}x$; г) $y = x^2$; е) $y = \sqrt[5]{x}$.

1163. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 502), определите, что меньше:

а) $\operatorname{tg} 0{,}5$ или $\operatorname{tg} 1$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ или $\operatorname{tg} 0{,}57$;
б) $\operatorname{tg}(-0{,}2)$ или $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\operatorname{tg}(-0{,}4)$ или $\operatorname{tg}(-1)$;
в) $\operatorname{tg} 1{,}5$ или $\operatorname{tg} 0{,}5$; е) $\operatorname{tg}(-1)$ или $\operatorname{tg} 0{,}1$.

1164. Определите, истинно ли равенство:

а) $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg}(x + \pi)$; д) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{21\pi}{6}$;
б) $\operatorname{tg}(2x - 2\pi) = \operatorname{tg}(2x + 6\pi)$; е) $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{9}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{23\pi}{9}\right)$;
в) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; ж) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} = \operatorname{tg}\frac{57\pi}{5}$;
г) $\operatorname{tg}(7\pi - t) = \operatorname{tg}(3\pi - t)$; з) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$.

1165. Определите, какой знак имеет значение функции $y = \operatorname{tg} x$ при значении аргумента x, равном:

а) $\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{7\pi}{5}$; ж) $-\frac{4\pi}{3}$; к) $\frac{11\pi}{3}$;
б) 3; д) $\frac{16\pi}{5}$; з) $\frac{5\pi}{4}$; л) 5;
в) 2; е) 7; и) $-\frac{3\pi}{4}$; м) $\frac{13\pi}{8}$.

1166. С помощью калькулятора или таблиц определите координату точки оси тангенсов, соответствующей числу:

а) 0; б) $1{,}5$; в) $1{,}3$; г) $1{,}2$; д) $0{,}5$; е) $0{,}3$.

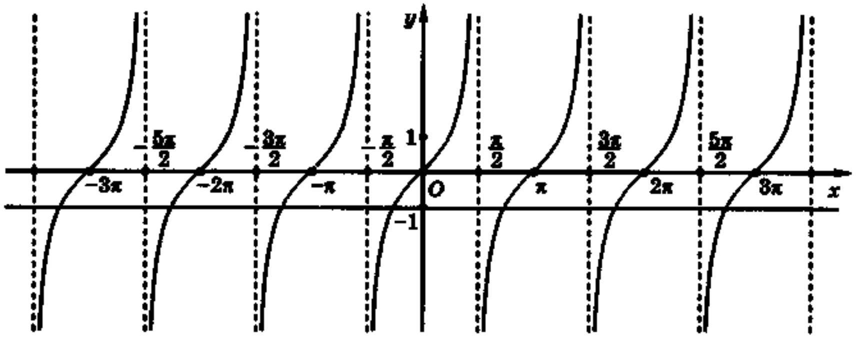


Рис. 503

1167. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 502) и ее свойства, укажите значение аргумента, при котором тангенс равен 1, а аргумент принадлежит промежутку:

а) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left(3\pi; -\frac{7\pi}{2}\right)$; в) $\left(4\pi; \frac{9\pi}{2}\right)$; г) $\left(8\pi; \frac{17\pi}{2}\right)$.

1168. Используя графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -1$, приведенные на рисунке 503, укажите три промежутка, на которых:

а) $\operatorname{tg} x < -1$; б) $\operatorname{tg} x > -1$; в) $\operatorname{tg} x \leqslant -1$; г) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

1169. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$, представленный на рисунке 502, запишите формулу, задающую все промежутки, на которых тангенс:

а) отрицателен; в) неотрицателен;
б) положителен; г) неположителен.

1170. Докажите, что для значений переменной x, близких к нулю, истинно приближенное равенство $\operatorname{tg} x \approx x$.

1171. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$, укажите наибольшее и наименьшее значения этой функции на промежутке:

а) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right]$;
б) $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{5\pi}{4}\right]$.

1172. Найдите значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ при значении аргумента, равном:

а) -1; б) 0; в) 1; г) $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

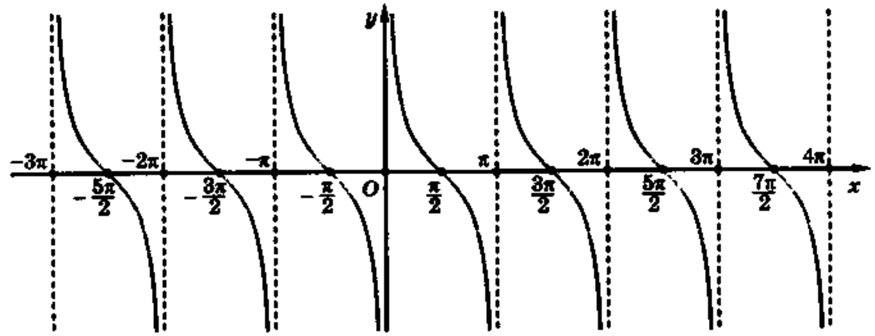


Рис. 504

1173. Докажите, что функция $y = \operatorname{arctg} x$ является возрастающей.

1174. Докажите, что график функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен относительно прямой $y = x$ части графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

1175. Запишите котангенс числа:

а) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{\pi}{3}$; ж) $\frac{2\pi}{3}$;
б) $-\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{\pi}{3}$; з) $\frac{\pi}{2}$.

1176. Используя калькулятор или таблицы, определите координату точки оси котангенсов, соответствующей числу:

а) 1; в) −1,3; д) −0,5;
б) −1,5; г) −1,2; е) −0,3.

1177. Используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$, представленный на рисунке 504, определите, что меньше:

а) $\operatorname{ctg} 0{,}5$ или $\operatorname{ctg} 1$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ или $\operatorname{ctg} 0{,}57$;
б) $\operatorname{ctg}(-0{,}2)$ или $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\operatorname{ctg}(-0{,}4)$ или $\operatorname{ctg}(-1)$;
в) $\operatorname{ctg} 1{,}5$ или $\operatorname{ctg} 0{,}5$; е) $\operatorname{ctg}(-1)$ или $\operatorname{ctg} 0{,}1$.

1178. Используя графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = -1$, приведенные на рисунке 505, укажите три промежутка, на которых:

а) $\operatorname{ctg} x < -1$; в) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$;
б) $\operatorname{ctg} x > -1$; г) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$.

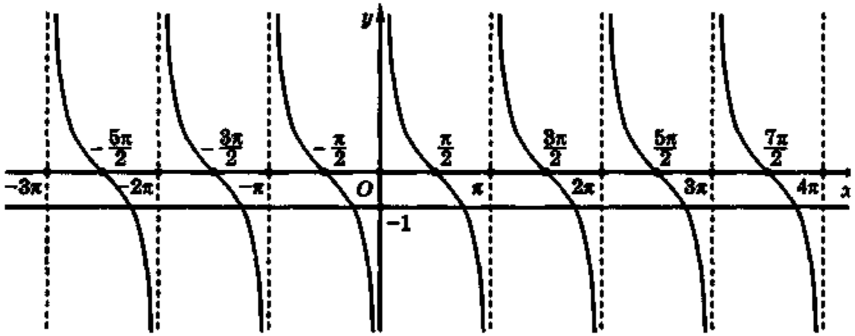


Рис. 505

1179. Используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$, представленный на рисунке 504, запишите формулу, выражающую все промежутки, на которых котангенс:

а) отрицателен; в) неотрицателен;
б) положителен; г) неположителен.

1180. Определите, истинно ли равенство:

а) $\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg}(x + \pi)$;
б) $\operatorname{ctg}(2x - 2\pi) = \operatorname{ctg}(2x + 6\pi)$;
в) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
г) $\operatorname{ctg}(7\pi - t) = \operatorname{ctg}(3\pi - t)$;
д) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{6}$;
е) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{6\pi}{9}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{23\pi}{9}\right)$;
ж) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5} = \operatorname{ctg}\frac{57\pi}{5}$;
з) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$.

1181. Определите, какой знак имеет значение функции $y = \operatorname{ctg} x$ при значении аргумента x, равном:

а) $\frac{8\pi}{9}$; в) $\frac{13\pi}{3}$; д) $\frac{632\pi}{9}$;
б) $\frac{5\pi}{23}$; г) 28; е) $-\frac{2008\pi}{3}$.

1182. Используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (см. рис. 505) и ее свойства, на промежутке $(0; \pi)$ решите неравенство:

а) $\operatorname{ctg} x < 1$; г) $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$; ж) $\operatorname{ctg} x > -1$;
б) $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$; д) $\operatorname{ctg} x < -1$; з) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$.
в) $\operatorname{ctg} x > 1$; е) $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$;

1183. Используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$, укажите наибольшее и наименьшее значения этой функции на промежутке:

а) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right]$;
б) $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{5\pi}{4}\right]$.

1184. Найдите значение функции $y = \operatorname{arcctg} x$ при значении аргумента, равном:

а) -1; б) 0; в) 1; г) $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1185. Докажите, что функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является убывающей.

1186. Докажите, что график функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен относительно прямой $y = x$ части графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$.

1187. Докажите, что истинно равенство:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5} + \operatorname{arctg} 3 = \frac{\pi}{4}$;
б) $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5} = \operatorname{arctg}\frac{2}{11}$;
в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$;
г) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4} + \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{7} = \frac{\pi}{3}$;
д) $\operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{\pi}{4}$;
е) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

1188. Докажите, что истинно равенство:

а) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arcctg} 7 = \frac{\pi}{4}$;
б) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arcctg}\frac{1}{3} = \frac{3\pi}{4}$;
в) $\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi}{6}$;
г) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

1189. Докажите, что истинно равенство:

а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{m} + \operatorname{arctg}\frac{m-1}{m+1} = \frac{\pi}{4}$;
б) $\operatorname{arctg}\frac{n}{m} + \operatorname{arctg}\frac{m-n}{m+n} = \frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}=\operatorname{arcctg}3$;
г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\operatorname{arctg}\frac{3}{11}=\frac{\pi}{4}$.

1190. Решите уравнение:

а) $\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg} 3a$;
б) $\operatorname{arctg} x=3\arcsin a$;
в) $\operatorname{arcctg} x=3\arccos a$;
г) $\operatorname{arcctg} x=2\operatorname{arctg} a$;
д) $\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arctg} a$;
е) $\arcsin x=4\arcsin a$.

1191. Решите уравнение:

а) $\arcsin x=\arccos x$;
б) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg} x$;
в) $\pi-\arcsin x=\arccos x$;
г) $\operatorname{arctg} 3x-\operatorname{arcctg} 3x=\frac{\pi}{4}$.

1192. Точка находится на расстоянии 8 см от каждой вершины правильного треугольника со стороной 12 см. Найдите расстояние этой точки от плоскости треугольника.

1193. Есть равнобедренный треугольник, основание которого и проведенная к нему высота равны 8 см. Точка A отстоит на 12 см от плоскости треугольника и равноудалена от его вершин. Найдите расстояние точки A от вершин треугольника.

1194. Из точки, отстоящей от плоскости на 10 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, учитывая, что они перпендикулярны и образуют с плоскостью углы в 30°.

1195. Из вершины квадрата возведен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин квадрата равны a и b, причем $a < b$. Найдите перпендикуляр и сторону квадрата.

1196. Из вершины X прямоугольного треугольника XYZ с гипотенузой XY к его плоскости возведен перпендикуляр XQ. Найдите площадь треугольника YZQ, учитывая, что $YZ=12$ см, $ZQ=12\sqrt{3}$ см.

1197. Используя рисунок 506, докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания пирамиды и ее апофемы.

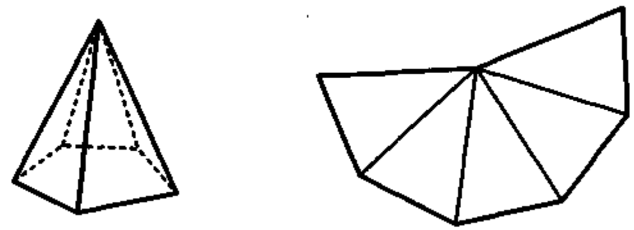


Рис. 506

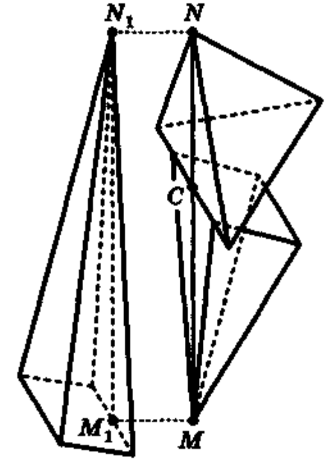


Рис. 507

1198. На отрезке MN выбрана точка C, и на отрезках-частях CN и CM как на апофемах построены правильные пирамиды. Их боковые поверхности равны 150 см^2 и 270 см^2, а периметр основания второй пирамиды составляет 120 % периметра основания первой пирамиды (рис. 507). Найдите апофемы пирамид, учитывая, что когда на отрезке M_1N_1, равном MN, как на апофеме построили третью правильную пирамиду с боковой поверхностью 420 см^2, то периметр ее основания оказался равным 28 см.

1199. Велосипедист с одной скоростью проехал 39 км, а затем снизил ее на 20 % и проехал еще 15,6 км. Найдите скорости велосипедиста, учитывая, что средняя скорость на всем пути составила 14 км/ч.

* * *

1200. Решите уравнение $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy$.

1201. Найдите область значений функции

$$y=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}.$$

1202. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить суммой двух взаимно простых чисел, больших единицы.

24. Простейшие тригонометрические уравнения

Рассмотрим *простейшие тригонометрические уравнения*, т. е. уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Пусть есть уравнение

$$\sin x = a.$$

Для его решения на координатную плоскость uOv наложим тригонометрическую окружность и прямую $v = a$. При этом возможны три случая: прямая $v = a$ пересекает окружность в двух точках, если $|a| < 1$ (рис. 508); прямая $v = a$ касается окружности, если $|a| = 1$ (рис. 509 и 510); прямая $v = a$ не имеет с окружностью общих точек, если $|a| > 1$ (рис. 511). В первом и во втором случаях уравнение $\sin x = a$ имеет корни, в третьем это уравнение корней не имеет.

Пример 1. Решим уравнение $\sin x = 0$. Прямая $v = 0$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках M_0 и M_π (рис. 512). Точка M_0 представляет все числа вида $2k\pi$, а точка M_π — все числа вида $\pi + 2n\pi$, где k и n — целые числа. Значит,

$$x = 2k\pi,\ k \in Z, \text{ или } x = (2n+1)\pi,\ n \in Z.$$

Здесь запись-формула $k \in Z$ выражает утверждение «k — целое число», или равносильное ему утверждение «Число k принадлежит множеству целых чисел».

Заметим, что две записанные серии корней можно выразить одной формулой

$$x = m\pi,\ m \in Z,$$

так как при четных значениях переменной m, т. е. если $m = 2k$, получается первая серия, а при нечетных значениях переменной m, т. е. если $m = 2n + 1$, — вторая серия.

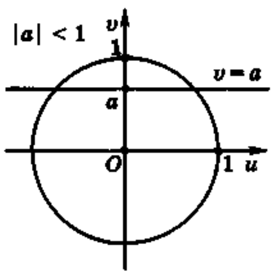


Рис. 508

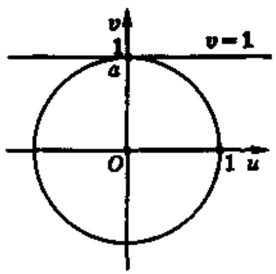


Рис. 509

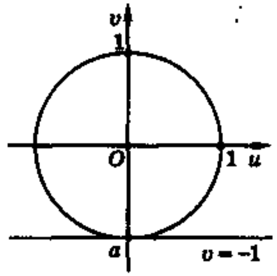


Рис. 510

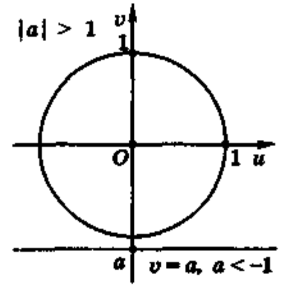


Рис. 511

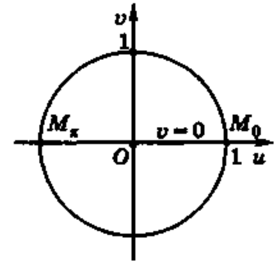


Рис. 512

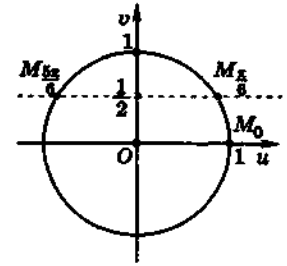


Рис. 513

Пример 2. Решим уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$. Прямая $v = \frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках $M_{\frac{\pi}{6}}$ и $M_{\frac{5\pi}{6}}$ (рис. 513). Точка $M_{\frac{\pi}{6}}$ соответствует всем числам вида $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, а точка $M_{\frac{5\pi}{6}}$ — всем числам вида $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, где k и n — целые числа. Значит, множество корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ составляют множества $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in Z\right\}$ и $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in Z\right\}$, что можно записать так:

$$\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2n\pi \mid n \in Z\right\}.$$

Ответ можно записать в виде

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z, \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in Z,$$

или в виде

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi,\ m \in Z,$$

поскольку при четных значениях m эта формула дает числа первой серии, а при нечетных — второй. Действительно, если $m = 2k$, то $x = (-1)^{2k} \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$, а если $m = 2n + 1$, то $x = (-1)^{2n+1} \frac{\pi}{6} + (2n+1)\pi = \pi - \frac{\pi}{6} + 2n\pi = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in Z$.

Теорема 14. ***Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней, а если $|a| \leq 1$, то корни этого уравнения выражаются формулой***

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z.$$

Доказательство. Пусть $|a| > 1$. Тогда прямая $v = a$ не пересекает тригонометрическую окружность, и поэтому уравнение $\sin x = a$ не имеет корней.

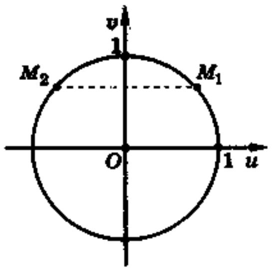


Рис. 514

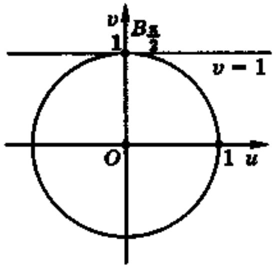


Рис. 515

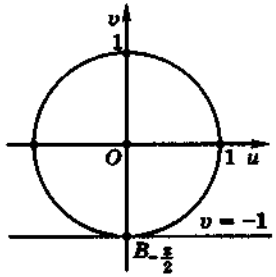


Рис. 516

Пусть $|a| < 1$. Тогда прямая $v = a$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках M_1 и M_2 (рис. 514).

Точка M_1 тригонометрической окружности соответствует числу $\arcsin a$ из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = \arcsin a + 2m\pi, \text{ где } m \in Z. \qquad (1)$$

Точка M_2 соответствует числу $\pi - \arcsin a$ из промежутка $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = \pi - \arcsin a + 2n\pi, \text{ где } n \in Z. \qquad (2)$$

Формулы $x = \arcsin a + 2m\pi$ и $x = \pi - \arcsin a + 2n\pi$, где m и n — целые числа, можно объединить в одну формулу

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z, \qquad (3)$$

поскольку при четных значениях переменной k, т. е. если $k = 2m$, получается первая формула, а при нечетных значениях k, т. е. если $k = 2n + 1$, — вторая формула.

Если $a = 1$, то выражения $\arcsin a$ и $\pi - \arcsin a$ оба становятся выражением $\frac{\pi}{2}$, что соответствует касанию прямой $v = a$ и тригонометрической окружности в точке B (рис. 515). В этом случае все три формулы (1), (2) и (3) дают одно и то же множество чисел $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in Z\right\}$.

Если $a = -1$ (рис. 516), то формулы (1), (2) и (3) также определяют одно и то же множество чисел $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in Z\right\}$.

Пусть есть уравнение

$$\cos x = a.$$

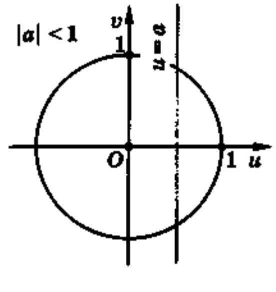


Рис. 517

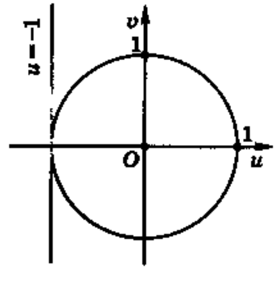


Рис. 518

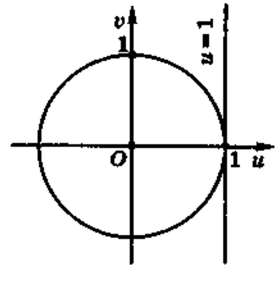


Рис. 519

Для его решения на координатной плоскости uOv рассмотрим тригонометрическую окружность и прямую $u = a$. При этом реализуется один из трех случаев: прямая $u = a$ пересекает окружность в двух точках, если $|a| < 1$ (рис. 517); прямая $u = a$ касается окружности, если $|a| = 1$ (рис. 518 и 519); прямая $u = a$ не имеет с окружностью общих точек, если $|a| > 1$ (рис. 520). В третьем случае уравнение $\cos x = a$ корней не имеет, в первом и во втором случаях это уравнение имеет корни.

Пример 3. Решим уравнение $\cos x = 0$.

Есть две точки тригонометрической окружности, которые имеют абсциссу, равную 0, — точки $M_{\frac{\pi}{2}}$ и $M_{\frac{3\pi}{2}}$ (рис. 521). Точка $M_{\frac{\pi}{2}}$ соответствует числам вида $\frac{\pi}{2} + 2m\pi$, а точка $M_{\frac{3\pi}{2}}$ — числам вида $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, где m и n — целые числа. Эти две серии корней можно выразить одной формулой

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$$

Полученная формула и задает множество корней уравнения $\cos x = 0$.

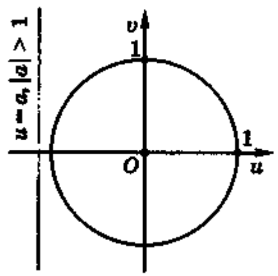


Рис. 520

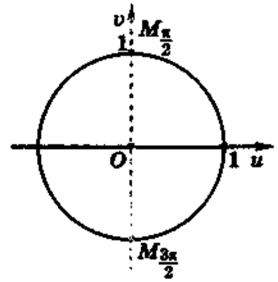


Рис. 521

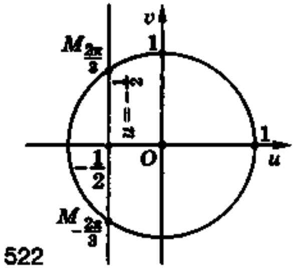


Рис. 522

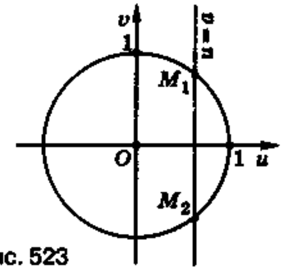


Рис. 523

Пример 4. Решим уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$. Прямая $u = -\frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках $M_{\frac{2\pi}{3}}$ и $M_{-\frac{2\pi}{3}}$ (рис. 522). Точка $M_{\frac{2\pi}{3}}$ представляет все числа вида $\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, а точка $M_{-\frac{2\pi}{3}}$ — все числа вида $-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, где m и n — целые числа. Эти числа вместе составляют множество корней уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$. Ответ можно записать и так:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Теорема 15. ***Если** $|a| > 1$, **то уравнение** $\cos x = a$ **не имеет корней, а если** $|a| < 1$, **то множество корней этого уравнения выражается формулой***

$$x = \pm\arccos a + 2k\pi,\ \text{где } k \in Z.$$

Доказательство. Пусть $|a| > 1$. Тогда прямая $u = a$ не пересекает тригонометрическую окружность, и поэтому уравнение $\cos x = a$ не имеет корней.

Пусть $|a| < 1$. Тогда прямая $u = a$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках M_1 и M_2 (рис. 523).

Точка M_1 тригонометрической окружности соответствует числу $\arccos a$ из промежутка $[0; \pi]$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = \arccos a + 2m\pi,\ \text{где } m \in Z. \tag{4}$$

Точка M_2 соответствует числу $-\arccos a$ из промежутка $[-\pi; 0]$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = -\arccos a + 2n\pi,\ \text{где } n \in Z. \tag{5}$$

Две полученные серии корней можно объединить одной формулой

$$x = \pm\arccos a + 2k\pi,\ k \in Z. \tag{6}$$

Если $a = 1$, то выражения $\arccos a$ и $-\arccos a$ оба становятся числом 0, что соответствует касанию прямой $x = a$ и тригонометрической окружности в точке M_0 (рис. 524). В этом случае все три формулы (4), (5) и (6) дают одно и то же множество чисел $\{2k\pi \mid k \in Z\}$.

Если $a = -1$ (рис. 525), то формулы (4), (5) и (6) также выражают одно и то же множество чисел $\{(2k+1)\pi \mid k \in Z\}$.

Пусть есть уравнение

$$\operatorname{tg} x = a.$$

Теорема 16. ***Множество корней уравнения** $\operatorname{tg} x = a$ **выражается формулой***

$$x = \operatorname{arctg} a + m\pi,\ \text{где } m \in Z.$$

Доказательство. Пусть a — некоторое действительное число. Отметим его на оси тангенсов. Прямая, проходящая через эту точку и начало координат, пересекает тригонометрическую окружность в двух точках M_1 и M_2 (рис. 526).

Точка M_1 соответствует числу $\operatorname{arctg} a$ из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + 2m\pi,\ \text{где } m \in Z.$$

Точка M_2 соответствует числу $\pi + \operatorname{arctg} a$ из промежутка $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = \pi + \operatorname{arctg} a + 2n\pi,\ \text{где } n \in Z.$$

Две полученные серии корней можно объединить одной формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + k\pi,\ k \in Z.$$

Пример 5. Решим уравнение $\operatorname{tg} y = 3$.

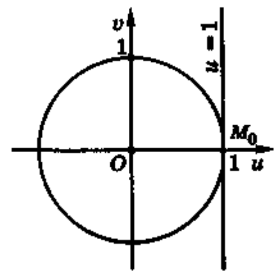


Рис. 524

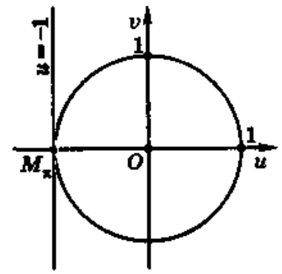


Рис. 525

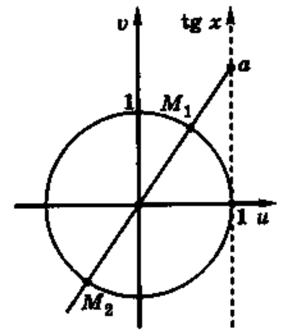


Рис. 526

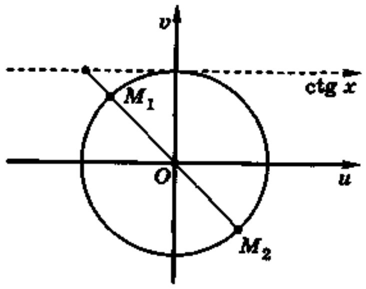


Рис. 527

В соответствии с теоремой 16 получим

$$y = \operatorname{arctg} 3 + k\pi,\ k \in Z.$$

Теорема 17. ***Множество корней уравнения** $\operatorname{ctg} x = a$ **выражается формулой***

$$x = \operatorname{arcctg} a + m\pi, \text{ где } m \in Z.$$

Доказательство теоремы 17 проводится аналогично доказательству теоремы 16. Проведите его самостоятельно, используя рисунок 527.

Пример 6. Решим уравнение $\operatorname{ctg} y = 2$.

В соответствии с теоремой 17 получим

$$y = \operatorname{arcctg} 2 + k\pi,\ k \in Z.$$

?
1. Какое число называется арксинусом числа a?
2. Укажите множество корней уравнения $\sin x = a$, если $a > 1$; $a < 1$.
3. Какое число называется арккосинусом числа a?
4. Укажите множество корней уравнения $\cos x = a$, если $a > 1$; $a < 1$.
5. Какое число называется арктангенсом числа a?
6. Укажите множество корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$.
7. Какое число называется арккотангенсом числа a?
8. Укажите множество корней уравнения $\operatorname{ctg} x = a$.

1203. Решите уравнение:

а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0$;

б) $\sin x = -\frac{1}{2}$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$;

в) $\sin 2x = 0$; ж) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}5$;

г) $\sin \frac{x}{3} = -1$; з) $2\sin 2x - 1 = 0$.

1204. Решите уравнение:

а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $3 \cos 5x - 3 = 0$;

б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

в) $\cos 3x = \frac{1}{2}$; ж) $2\cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$;

г) $\cos 2x = -1$; з) $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sqrt{3}$.

1205. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;

в) $\operatorname{tg} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $3 \operatorname{tg}(x+1) + \sqrt{3} = 0$;

г) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = -1$; ж) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 3$;

д) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$; з) $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

1206. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; д) $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\operatorname{ctg} 4x = 5$; ж) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$;

г) $\operatorname{ctg} 2x + \sqrt{3} = 0$; з) $3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 5 = 0$.

1207. Найдите сумму корней уравнения на промежутке $[-\pi;\ 2\pi]$:

а) $\sin t = -1$; в) $\cos t = -\frac{1}{2}$; д) $\cos 2t = 0$;

б) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin 2t = 0$; е) $\cos 2t = -1$.

1208. Найдите сумму корней уравнения на промежутке $[-2\pi;\ \pi]$:

а) $\sin 2t = 1$; в) $\sin^2 t = \frac{3}{4}$; д) $\operatorname{tg} t = 1$;

б) $\sin t \cos t = 0$; г) $\cos^2 t = \frac{1}{2}$; е) $\operatorname{tg} 2t = 1$.

1209. Найдите сумму корней уравнения на указанном промежутке:

а) $\sin^2 t = \frac{1}{4}$, $[0;\ 2\pi]$; в) $\operatorname{tg}^2 t = 1$, $[-2\pi;\ \pi]$;

б) $\cos x = 1$, $[-\pi;\ 3\pi]$; г) $\operatorname{ctg}^2 t = 3$, $[0;\ 2\pi]$.

1210. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды $DFGH$ равна 12 см. Найдите расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания, учитывая, что ребро основания равно 8 см.

1211. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC с катетом и прилежащим к нему углом, соответственно равными a и α, возведен перпендикуляр CD длиной l. Найдите площадь треугольника DAB.

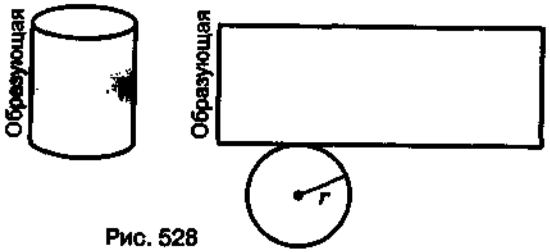


Рис. 528

1212. Основание XY и боковая сторона YZ равнобедренного треугольника XYZ соответственно равны 6 см и 5 см. Из центра Q окружности, вписанной в треугольник, возведен перпендикуляр QG. Найдите высоту треугольника XGY, проведенную из вершины G, учитывая, что $QG = 2$ см.

1213. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC к его плоскости возведен перпендикуляр CD. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, учитывая, что $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$.

1214. Используя рисунок 528, докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на образующую.

1215. Есть три цилиндра. У одного окружность основания равна 21π см, у другого боковая поверхность равна 435π см^2, а образующая на 10 см короче, у третьего боковая поверхность равна сумме боковых поверхностей первого и второго цилиндров, длина окружности основания — сумме длин их окружностей, а образующая равна 19,2 см. Найдите образующую первого и второго цилиндров.

* * *

1216. Учитывая, что α — больший единицы корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$, упростите выражение $\sqrt[3]{3\alpha^2 - 4\alpha} + \sqrt[3]{3\alpha^2 + 4\alpha + 2}$.

1217. Диагональ AC четырехугольника $ABCD$ образует со сторонами CB и CD углы в $30°$ и $45°$, а диагональ BD отделяет равносторонний треугольник BCD. Найдите углы ABC и ADC.

1218. Какое наименьшее количество уголков из трех клеток нужно вырезать из шахматной доски, чтобы после этого уже нельзя было вырезать ни одного такого уголка?

25. Тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, которое содержит переменные под знаком синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

Решение тригонометрических уравнений сводится к решению простейших уравнений, рассмотренных в предыдущем параграфе. При этом приходится выполнять преобразования тригонометрических выражений.

Пример 1. Решим уравнение $10\cos^2 x - 2\sin x - 8 = 0$.

Заменив выражение $\cos^2 x$ равным ему выражением $1 - \sin^2 x$, получим квадратное уравнение относительно $\sin x$:

$$10\cos^2 x - 2\sin x - 2 = 0 \equiv 10(1 - \sin^2 x) - 2\sin x - 2 = 0 \equiv$$
$$\equiv 10 - 10\sin^2 x - 2\sin x - 2 = 0 \equiv 10\sin^2 x + 2\sin x - 8 = 0 \equiv$$
$$\equiv 5\sin^2 x + \sin x - 4 = 0 \equiv \sin x = -1 \text{ или } \sin x = \frac{4}{5} \equiv$$
$$\equiv x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z, \text{ или } x = (-1)^n \arcsin\frac{4}{5} + n\pi,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$; $x = (-1)^n \arcsin\frac{4}{5} + n\pi$, $n \in Z$.

Пример 2. Решим уравнение $\operatorname{tg} z + 7\operatorname{ctg} z + 8 = 0$.

Заменив выражение $\operatorname{ctg} z$ равным ему выражением $\frac{1}{\operatorname{tg} z}$, получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} z$:

$$\operatorname{tg} z + 7\operatorname{ctg} z + 8 = 0 \equiv \operatorname{tg} z + \frac{7}{\operatorname{tg} z} + 8 = 0 \equiv \operatorname{tg}^2 z + 8\operatorname{tg} z + 7 = 0 \equiv$$
$$\equiv \operatorname{tg} z = -1 \text{ или } \operatorname{tg} z = -7 \equiv$$
$$\equiv z = -\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z, \text{ или } x = -\operatorname{arctg} 7 + m\pi,\ m \in Z.$$

Обратим внимание на то, что второй переход в преобразованиях уравнения, который заключался в умножении левой и правой частей уравнения на $\operatorname{tg} z$, является преобразованием равносильности в области определения уравнения, которая определяется условием $\sin x \cos x \neq 0$. Все найденные корни удовлетворяют этому условию.

Ответ: $z = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$; $x = -\operatorname{arctg} 7 + m\pi$, $m \in Z$.

При решении тригонометрических уравнений может оказаться полезным использование приема *разложения на множители*.

Пример 3. Решим уравнение $2\sin t \sin 2t = \cos t$.

Используя тождество $\sin 2t = 2\sin t \cos t$, получим уравнение

$$2\sin t \cdot 2\sin t \cos t - \cos t = 0,$$

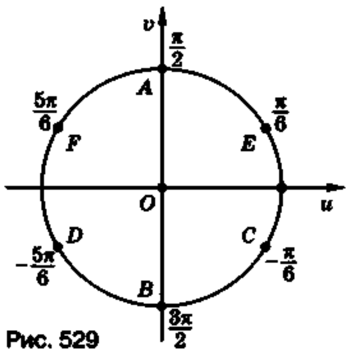


Рис. 529

которое после вынесения за скобки множителя $\cos t$ приводится к уравнению

$$\cos t\,(4\sin^2 t - 1) = 0.$$

Дальнейшее решение уравнения следующее:

$$\cos t\,(4\sin^2 t - 1) = 0 \equiv \cos t = 0 \text{ или } 4\sin^2 t - 1 = 0 \equiv$$
$$\equiv \cos t = 0, \text{ или } \sin t = -\frac{1}{2}, \text{ или } \sin t = \frac{1}{2} \equiv t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,$$
$$\text{или } t = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + n\pi,\ n \in Z, \text{ или } t = (-1)^m\,\frac{\pi}{6} + m\pi,\ m \in Z.$$

У нас получилось три серии корней. Иной раз некоторые из серий можно объединить в одну серию. Представим полученные серии корней на тригонометрической окружности. Первая серия изображается точками A и B, вторая — точками C и D, третья — точками E и F (рис. 529). Обратим внимание на то, что при движении по окружности, например, в положительном направлении каждая из этих точек получается из предыдущей сдвигом на $\frac{\pi}{3}$. Это позволяет все полученные серии выразить одной формулой $\frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3}$, $l \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3}$, $l \in Z$.

Пример 4. Решим уравнение

$$\sin^2 u + 2\sin u\cos u - 3\cos^2 u = 0.$$

Обратим внимание на то, что если считать $\sin u$ и $\cos u$ членами первой степени, то каждое слагаемое алгебраической суммы в левой части уравнения имеет одну и ту же — вторую — степень. Его можно решать делением на наибольшую степень синуса или косинуса. При этом мы не нарушаем равносильность преобразований, так как те значения переменной, при которых синус или косинус равны нулю, не являются корнями уравнения. Действительно, если допустить, что $\cos u = 0$, то тогда и $\sin u = 0$, но синус и косинус вместе не могут обращаться в нуль. Учитывая это, разделим обе части уравнения на $\cos^2 u$ и решим полученное уравнение, равносильное данному:

$$\sin^2 u + 2\sin u\cos u - 3\cos^2 u = 0 \equiv \operatorname{tg}^2 u + 2\operatorname{tg} u - 3 = 0 \equiv$$
$$\equiv \operatorname{tg} u = -3 \text{ или } \operatorname{tg} u = 1 \equiv$$
$$\equiv u = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi,\ k \in Z, \text{ или } u = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z.$$

Ответ: $u = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi$, $k \in Z$, или $u = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$.

Пример 5. Решим уравнение

$$3\sin^2 y - 11\sin y\cos y - 7 = 0.$$

Это уравнение заменой слагаемого 7 тождественно равным ему выражением $7(\sin^2 y + \cos^2 y)$ сводится к уравнению $3\sin^2 y - 11\sin y\cos y - 7\sin^2 y - 7\cos^2 y = 0$, у которого все слагаемые имеют вторую степень. Его дальнейшее решение следующее:

$$3\sin^2 y - 11\sin y\cos y - 7\sin^2 y - 7\cos^2 y = 0 \equiv$$
$$\equiv 7\cos^2 y + 11\sin y\cos y + 4\sin^2 y \equiv 7\operatorname{ctg}^2 y + 11\operatorname{ctg} y + 4 = 0 \equiv$$
$$\equiv \operatorname{ctg} y = -1 \text{ или } \operatorname{ctg} y = -\frac{4}{7} \equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi,$$
$$k \in Z, \text{ или } y = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{7}\right) + l\pi,\ l \in Z \equiv$$
$$\equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z, \text{ или } y = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{4}{7} + l\pi,\ l \in Z \equiv$$
$$\equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z, \text{ или } y = -\operatorname{arcctg}\frac{4}{7} + (l+1)\pi,$$
$$l \in Z \equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z, \text{ или } y = -\operatorname{arcctg}\frac{4}{7} + m\pi,\ m \in Z.$$

Ответ: $y = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$, или $y = -\operatorname{arcctg}\frac{4}{7} + m\pi$, $m \in Z$.

Пример 6. Решим уравнение

$$2\sin\frac{x}{3}\,\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = 1 - 2\sin\frac{x}{3},$$

Разложим данное уравнение на множители и решим полученное уравнение:

$$\left(2\sin\frac{x}{3}\operatorname{tg} x + 2\sin\frac{x}{3}\right) - (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \equiv$$
$$\equiv 2\sin\frac{x}{3}(\operatorname{tg} x + 1) - (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \equiv$$
$$\equiv (\operatorname{tg} x + 1)\left(2\sin\frac{x}{3} - 1\right) = 0 \equiv \operatorname{tg} x = -1 \text{ или } \sin\frac{x}{3} = \frac{1}{2} \equiv$$
$$\equiv x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z, \text{ или } \frac{x}{3} = (-1)^n\,\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z \equiv$$
$$\equiv x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z, \text{ или } x = (-1)^n\,\frac{\pi}{2} + 3n\pi,\ n \in Z.$$

Учтем область определения уравнения, которая определяется условием $\cos x \neq 0$. Легко заметить, что числа серии $x = (-1)^n\,\frac{\pi}{2} + 3n\pi$, $n \in Z$, этому условию не удовлетворяют и, значит, не могут входить в ответ.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

Пример 7. Решим уравнение $7\sin b + \cos b = 5$.

Используем формулу вспомогательного угла, для чего разделим левую и правую части уравнения на $\sqrt{7^2+1^2}$, т. е. на $\sqrt{50}$:

$$\frac{7}{\sqrt{50}}\sin b + \frac{1}{\sqrt{50}}\cos b = \frac{5}{\sqrt{50}}.$$

Поскольку $\left(\frac{7}{\sqrt{50}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^2 = 1$, то существует такое число u, что $\frac{7}{\sqrt{50}} = \sin u$ и $\frac{1}{\sqrt{50}} = \cos u$. Это позволяет уравнение представить так:

$$\sin u \sin b + \cos u \cos b = \frac{5}{5\sqrt{2}}, \text{ или } \cos(b-u) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит, $b - u = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, или $b = \pm\frac{\pi}{4} + u + 2k\pi$. Поскольку $u = \arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$, то

$$b = \pm\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{7}{\sqrt{50}} + 2k\pi.$$

Ответ: $b = \pm\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{7}{\sqrt{50}} + 2k\pi$.

Решим это уравнение иначе, используя *универсальную подстановку*, позволяющую выразить $\sin b$ и $\cos b$ через $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$:

$$\sin b = \frac{2\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}};\quad \cos b = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}.$$

С учетом этого уравнение приводится к виду:

$$\frac{14\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}} = 5.$$

Его решение может быть таким:

$$14\operatorname{tg}\frac{b}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2\frac{b}{2} - 5 - 5\operatorname{tg}^2\frac{b}{2} = 0 \equiv 6\operatorname{tg}^2\frac{b}{2} - 14\operatorname{tg}\frac{b}{2} + 4 = 0 \equiv$$

$$\equiv \operatorname{tg}\frac{b}{2} = \frac{1}{3} \text{ или } \operatorname{tg}\frac{b}{2} = 2 \equiv \frac{b}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + m\pi,\ m\in \mathbf{Z}, \text{ или } \frac{b}{2} = \operatorname{arctg} 2 + n\pi,\ n \in \mathbf{Z} \equiv$$

$$\equiv b = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z}, \text{ или } b = 2\operatorname{arctg} 2 + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Учитывая условия, при которых применима универсальная подстановка, остается проверить, удовлетворяют ли уравнению числа вида $\pi + 2l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$:

$$7\sin(\pi + 2l\pi) + \cos(\pi + 2l\pi) = 7\sin\pi + \cos\pi = 0 - 1 = -1 \neq 5.$$

Ответ: $b = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$; $b = 2\operatorname{arctg} 2 + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

При решении тригонометрических уравнений могут использоваться *свойства тригонометрических функций.*

Пример 8. Решим уравнение

$$\sin^2 s \sin 3s - 1 = \cos^2 s - \cos^4 s.$$

Преобразуем тождественно правую часть уравнения:

$$\sin^2 s \sin 3s - 1 = \cos^2 s - \cos^4 s \equiv \sin^2 s \sin 3s - 1 = \cos^2 s(1-\cos^2 s) \equiv \sin^2 s \sin 3s - 1 = \cos^2 s \sin^2 s.$$

Теперь обратим внимание на то, что значения левой части $\sin^2 s \sin 3s - 1$ уравнения принадлежат промежутку $[-2; 0]$, а правой части $\cos^2 s \sin^2 s$ — промежутку $[0; 1]$. Отсюда понятно, что равенство может достигаться только при условии, что левая и правая части уравнения обе равны нулю, т. е. данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin^2 s\sin 3s - 1 = 0,\\ \cos^2 s \sin^2 s = 0.\end{cases}$ Второе уравнение системы требует, чтобы хотя бы один из множителей $\cos s$ или $\sin s$ был равен нулю. Таким множителем может быть только $\cos s$, так как если $\sin s = 0$, то первое уравнение не выполняется ни при каком значении переменной s. Первое уравнение системы может быть истинно только при условии, что оба множителя $\sin^2 s$ и $\sin 3s$ равны единице. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos s = 0,\\ \sin^2 s = 1,\\ \sin 3s = 1.\end{cases}$ Можно заметить, что второе уравнение полученной системы следует из первого уравнения, поэтому его можно опустить: $\begin{cases}\cos s = 0,\\ \sin 3s = 1.\end{cases}$ Корнями первого уравнения являются числа вида $\frac{\pi}{2} + l\pi$, где $l \in \mathbf{Z}$. Эти числа должны удовлетворять и второму уравнению, т. е. должно выполняться уравнение $\sin 3\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = 1$. Решим его:

$$\sin 3\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = 1 \equiv \frac{3\pi}{2} + 3l\pi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z} \equiv$$

$$\equiv 1 + 3l = 2m,\ m \in \mathbf{Z} \equiv m = \frac{1+3l}{2},\ m \in \mathbf{Z} \equiv l = 2k+1.$$

Значит, $s = \frac{\pi}{2} + l\pi = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $s = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, где $k \in \mathbf{Z}$.

?

1. Какое уравнение называется тригонометрическим?
2. При каких значениях аргумента определена функция $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$?
3. При каком условии истинно равенство $AB = 0$?
4. Как решают тригонометрические уравнения, слагаемые обеих частей которых имеют одну и ту же степень?
5. В чем заключается универсальная подстановка и при каком условии она применима?

1219. Решите уравнение:

а) $\dfrac{\sin t}{1-\cos t} = 0$; в) $\dfrac{5}{3\sin t + 4} = 2$; д) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 z}{\operatorname{tg} z} = 0$;

б) $\dfrac{\cos y}{1+\sin y} = 0$; г) $\dfrac{3}{5\operatorname{tg} x + 8} = 1$; е) $\dfrac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = 0$.

1220. Решите уравнение:

а) $\sin t \cos t = 0{,}25$; г) $\sin^4 \dfrac{y}{2} - \cos^4 \dfrac{y}{2} = 0{,}25$;

б) $\sin n \cos n = -0{,}25$; д) $\sin^2 x = \dfrac{1}{4}$;

в) $\sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos^2 \dfrac{x}{2} = 0{,}5$; е) $\cos^2 y = \dfrac{1}{2}$.

1221. Решите уравнение:

а) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$; д) $2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
б) $6\sin^2 x - \cos x + 6 = 0$; е) $\operatorname{tg} x - 12\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;
в) $6\cos^2 x + 7\cos x - 3 = 0$; ж) $\operatorname{tg} y = 3\operatorname{ctg} y$;
г) $8\cos^2 x - 12\sin x + 7 = 0$; з) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

1222. Решите уравнение:

а) $2\cos^2 z - \sin z + 1 = 0$; е) $2\sin^2 y + 3\cos y = 0$;
б) $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$; ж) $5\sin^2 y + 6\cos y - 6 = 0$;
в) $4\sin^2 y - \cos y - 1 = 0$; з) $\cos^2 x + 3\sin x = 3$;
г) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$; и) $\cos 4x - \sin 2x = 1$;
д) $2\cos^2 y + \sin y + 1 = 0$; к) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

1223. Решите уравнение:

а) $\cos y = \sin y$; д) $\sin z = 2\cos z$;
б) $\sin y + \sqrt{3}\cos y = 0$; е) $2\sin t + \cos t = 0$;
в) $3\sin k - \sqrt{3}\cos k = 0$; ж) $2\sin 2x = 3\cos 2x$;
г) $3\sin m + 5\cos m = 0$; з) $2\cos l - \sqrt{2}\sin l = 0$.

1224. Решите уравнение:

а) $\sin^2 k - 4\sin k \cos k + 3\cos^2 k = 0$;
б) $3\sin^2 x + \sin x \cos x = 2\cos^2 x$;

в) $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$;
г) $2\sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$;
д) $7\sin^2 t - 5\sin t \cos t - 2\cos^2 t = 0$;
е) $2\sin^2 y = \sqrt{6}\sin 2y - 3\cos^2 y$;
ж) $\sqrt{3}\sin^2 l = 4\sin l \cos l - \sqrt{3}\cos^2 l$;
з) $\sin^2 n + \sqrt{3}\cos^2 n = \left(1+\sqrt{3}\right)\sin n \cos n$.

1225. Решите уравнение:

а) $3\sin x \cos x - 2\cos 2x = 0$;
б) $\cos^2 y + 4\sin^2 y = 2\sin 2y$;
в) $\sin 2y + \sin y \cos y = 2\cos 2y$;
г) $2\cos^2 2t + 3\sin 4t + 4\sin^2 2t = 0$.

1226. Решите уравнение:

а) $\cos^2 l - 3\sin l \cos l + 1 = 0$;
б) $3\sin^2 y + 2\sin y \cos y = 2$;
в) $9\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 2$;
г) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 5$.

1227. Решите уравнение:

а) $\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right)\left(2\sin \dfrac{x}{12} + 1\right) = 0$;

б) $\left(1 - \sqrt{2}\cos \dfrac{x}{4}\right)\left(1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x\right) = 0$;

в) $\left(2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2\operatorname{tg} x + 1) = 0$;

г) $\left(1 + \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)(\operatorname{tg} x - 3) = 0$.

1228. Решите уравнение:

а) $2\sin^2 x + \sin x = 0$; ж) $\sqrt{3}\sin x \cos x = \sin^2 x$;
б) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$; з) $2\sin x \cos x = \cos x$;
в) $\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x = 0$; и) $2\sin^2 y = \sqrt{3}\sin 2y$;
г) $2\sin m - \cos m \sin m = 0$; к) $\sin 2y = 2\sin y$;
д) $\sqrt{3}\cos n + \cos n \sin n = 0$; л) $\operatorname{tg} 5y = \operatorname{tg} 3y$;
е) $\sqrt{3}\sin k \cos k = \cos^2 k$; м) $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

1229. Решите уравнение:

а) $\cos x = \cos 3x$; е) $\sin t + \cos 3t = 0$;
б) $\sin z = \sin 3z$; ж) $\sin 2z = \cos 3z$;
в) $\sin y + \sin 3y = 0$; з) $\sin 2y - \cos y = 0$;
г) $\sin 3x = \sin 5x$; и) $\sin 5t - \sin t = 0$;
д) $\cos 5t - \cos 3t = 0$; к) $\sin 5y = \sin 7y$.

1230. Решите уравнение:

а) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$;
б) $\sin 7y - \sin y = \cos 4y$;
в) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
г) $\sin x - \sin 3x = \sin 2x - \sin 4x$;
д) $\sin y + \sin 2y + \sin 3y + \sin 4y = 0$;
е) $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

1231. Решите уравнение:

а) $\sin 3a = \sin 2a \cos a$;
б) $\cos 7z \cos 3z = \cos 4z$;
в) $\cos 5a \cos a = \cos 4a$;
г) $\cos 3z \cos z = \cos 7z \cos 5z$.

1232. Решите уравнение:

а) $2 \sin t - 5 \cos t + 2 \operatorname{tg} t = 5$;
б) $\sin z - \cos z + \operatorname{tg} z = 1$;
в) $\operatorname{tg} z + \sin z \operatorname{tg} z = 0$;
г) $\cos t + \operatorname{tg} t = 0$;
д) $\operatorname{tg} 4z = \operatorname{tg} 2z$;
е) $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x = 1$.

1233. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0$;
б) $\sin y + \cos y = 1$;
в) $\sin x - \cos x = 1$;
г) $\sin y - \sqrt{3} \cos y = 1$;
д) $\sin 3t + \cos 3t = \sqrt{2}$;
е) $\sqrt{3} \sin z + \cos z = \sqrt{2}$;
ж) $\sqrt{3} \sin z + \cos z = 2$;
з) $4 \sin x + 3 \cos x = 6$.

1234. Решите уравнение:

а) $\sin 5t + \sqrt{3} \cos 5t = 2 \sin 7t$;
б) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 7x$;
в) $\cos 3y - \sin y = \cos y - \sin 3y$;
г) $5 (\sin t + \cos t)^2 - 13 (\sin t + \cos t) + 8 = 0$.

1235. Решите уравнение:

а) $2 \sin 2z - 3 (\sin z + \cos z) + 2 = 0$;
б) $\sin x + \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x$.

1236. Решите уравнение:

а) $\cos 2z + \operatorname{tg} z = 1$;
б) $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1$;
в) $2 \sin u - 5 \cos u = 4$;
г) $5 \sin x + \cos x = 5$;
д) $\sqrt{3} \sin y - \sqrt{5} \cos y = \sqrt{3}$;
е) $\cos 2x + 3 \sin 2x = 3$;
ж) $\sin y - \sqrt{7} \cos y = \sqrt{7}$;
з) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right) = 1$.

1237. Решите уравнение:

а) $\sin d + \cos d = 3$;
б) $\sin a + \cos 2a = 2$;
в) $\sin 3x + \cos 4x = 2$;
г) $\sin 4z + |\sin 5z| = 2$;
д) $2 \sin e - 3 \cos e = 6$;
е) $\sin 3y - \cos 2y = 2$;
ж) $\sin \frac{a}{3} - \sin \frac{a}{4} = -2$;
з) $\sin z - \cos 2z + \sin 4z = 3$.

1238. Решите уравнение:

а) $\sin x \sin 5x = 1$;
б) $\sin x \cos 4x = -1$;
в) $\cos x \sin 5x = -1$;
г) $\cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{5} = 1$;
д) $\sin 6u \sin 8u = 1$;
е) $\cos 4x \cos 5x = 1$;
ж) $\cos 8w \cos 3w = -1$;
з) $\sin^3 5t + \sin^4 7t = 2$.

1239. Докажите, что уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin 100x = 100$$

не имеет корней.

1240. Решите уравнение:

а) $\frac{\sin x}{\sin 5x} = 0$;
б) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$;
в) $\frac{\cos 2x}{\cos x} = 0$;
г) $\frac{\sin 3a}{\cos 5a} = 0$;
д) $\frac{\sin 4c}{\cos 6c} = 1$;
е) $\frac{\cos 3d}{\sin 2d} = 1$.

1241. В основании треугольной пирамиды $KLMN$ лежит равнобедренный треугольник LMN с основанием MN, а ее боковое ребро KL перпендикулярно плоскости основания. Найдите площадь грани KMN, учитывая, что $LM = 10$ см, $MN = 12$ см, $LK = 15$ см.

1242. В треугольной пирамиде $IJKL$ боковое ребро KI перпендикулярно плоскости JKL. Найдите высоту IH грани IJL, учитывая, что $JK = 10$ см, $KL = 17$ см, $JL = 21$ см, $IK = 15$ см.

1243. Точка отстоит от плоскости треугольника на 2,2 м, а от каждой из его сторон на 12,2 м. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

1244. Боковые ребра треугольной пирамиды все равны a и образуют с основанием пирамиды углы в 30°. Найдите сторону основания, которое является правильным треугольником.

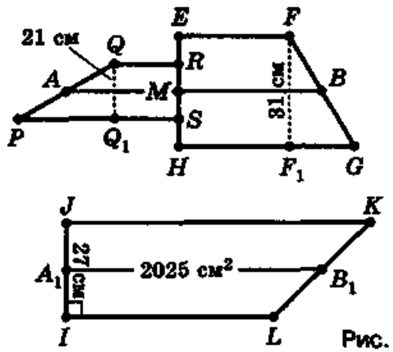


Рис. 530

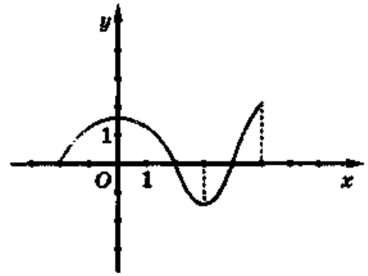


Рис. 531

1245. Есть ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом A, равным 60°. К его плоскости из вершины B возведен перпендикуляр BP. Найдите синус угла между прямой PD и плоскостью PBC, учитывая, что эта прямая с плоскостью ромба образует угол, равный 45°.

1246. Есть прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $D_1B = d$, $AC = m$, $AB = l$. Найдите расстояние между:

а) прямой A_1C_1 и плоскостью ABC;
б) плоскостями ABB_1 и DCC_1;
в) прямой DD_1 и плоскостью ACC_1.

1247. На отрезке AB взяли точку M, и на отрезках-частях MA и MB как на средних линиях построили прямоугольные трапеции $PQRS$ и $EFGH$ с высотами QQ_1 и FF_1, соответственно равными 21 см и 31 см, и суммарной площадью 2025 см^2 (рис. 530). Такую площадь имела бы трапеция $IJKL$ со средней линией A_1B_1, равной AB, и высотой 27 см. Найдите:

а) средние линии трапеций $PQRS$ и $EFGH$;
б) боковые стороны трапеций $PQRS$ и $EFGH$, учитывая, что углы P и G соответственно равны 30° и 60°.

1248. Сплавили кусок меди плотностью 8,96 г/см^3 и кусок цинка плотностью 7,13 г/см^3 и получили 100 кг латуни плотностью 8,20 г/см^3. Найдите с точностью до килограмма массы взятых кусков.

1249. На рисунках 532—543 представлены графики функций, полученные различными преобразованиями графика функции $y = f(x)$, изображенного на рисунке 531. Укажите номер рисунка, на котором приведен график функции:

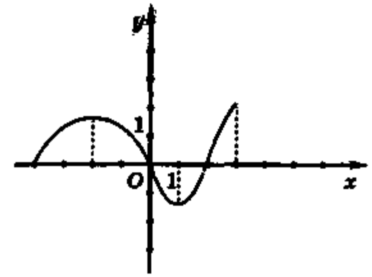


Рис. 532

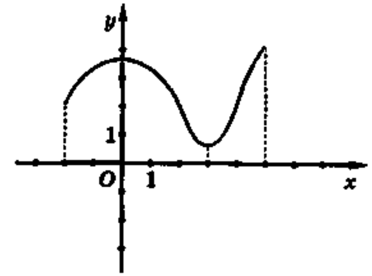


Рис. 533

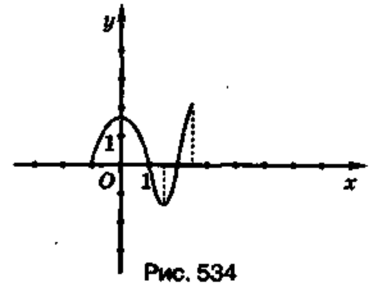


Рис. 534

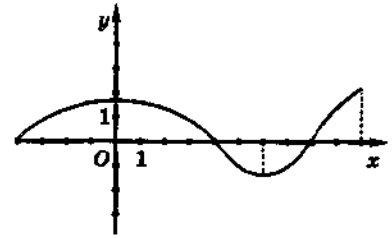


Рис. 535

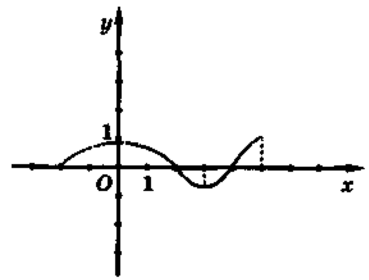


Рис. 536

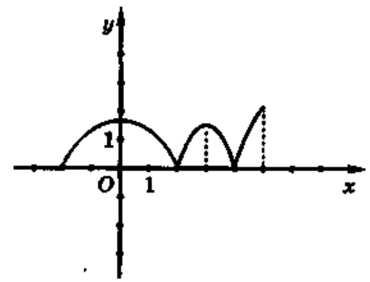


Рис. 537

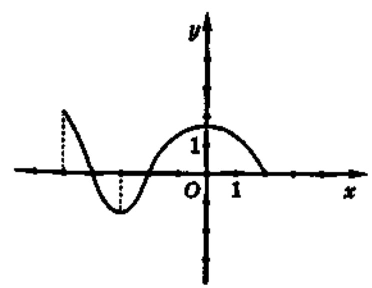


Рис. 538

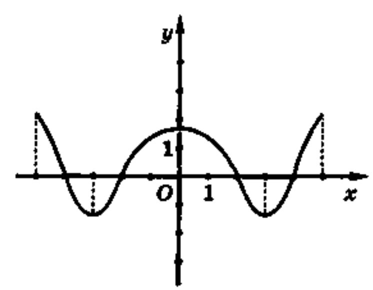


Рис. 539

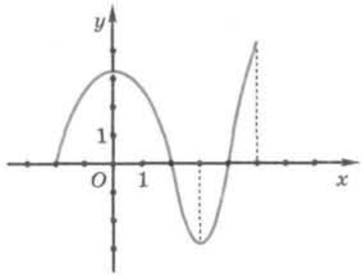


Рис. 540

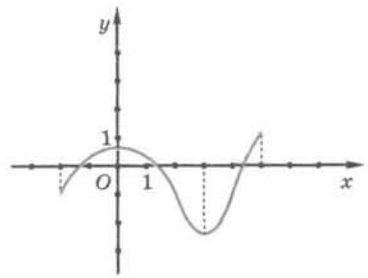


Рис. 541

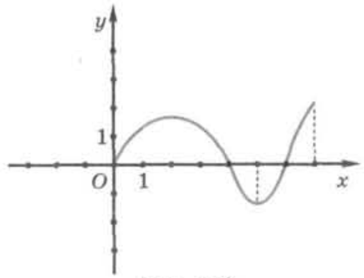


Рис. 542

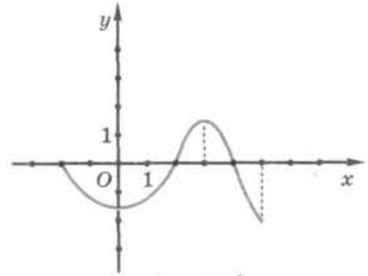


Рис. 543

а) $y = f(x+2)$; д) $y = -f(x)$; и) $y = 2f(x)$;
б) $y = f(x-2)$; е) $y = f(-x)$; к) $y = \frac{1}{2}f(x)$;
в) $y = f(x)+2$; ж) $y = |f(x)|$; л) $y = f(2x)$;
г) $y = f(x)-2$; з) $y = f(|x|)$; м) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

* * *

1250. На бумаге в клетку построен прямоугольник, стороны которого принадлежат линиям сетки. Размеры прямоугольника составляют $m \times n$ клеток, причем числа m и n взаимно простые. Учитывая, что диагональ прямоугольника не пересекает во внутренних точках 116 клеток, определите, сколько клеток она может пересекать.

1251. Угол A треугольника ABC равен $50°$, а угол C равен $70°$. На сторонах AB и BC отмечены соответственно такие точки P и Q, что $\angle ACP = \angle CAQ = 30°$. Учитывая, что отрезки AP и CQ пересекаются в точке M, найдите:

а) $\angle ABM$; б) $\angle CPQ$.

1252. Можно ли на плоскости отметить 225 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя точками было не меньше 3 и не больше 21?

26.* Тригонометрические функции

Используя графики простейших тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и известные вам преобразования графиков функций, можно строить графики более сложных тригонометрических функций.

Пример 1. Построим график функции $y = 2\sin\left(3x + 1\frac{1}{2}\right)$.

Учтем, что $y = 2\sin\left(3x + 1\frac{1}{2}\right) = 2\sin 3\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Поэтому искомый график получается из графика функции $y = \sin x$ в результате следующей последовательности преобразований:

сжиманием в 3 раза графика функции $y = \sin x$ к оси ординат получим график функции $y = \sin 3x$ (рис. 544);

сдвигом графика функции $y = \sin 3x$ вдоль оси абсцисс на $\frac{1}{2}$ влево получим график функции $y = \sin 3\left(x + \frac{1}{2}\right)$ (рис. 545);

растяжением графика функции $y = \sin 3\left(x + \frac{1}{2}\right)$ от оси абсцисс в 2 раза получим график функции $y = 2\sin 3\left(x + \frac{1}{2}\right)$ (рис. 546).

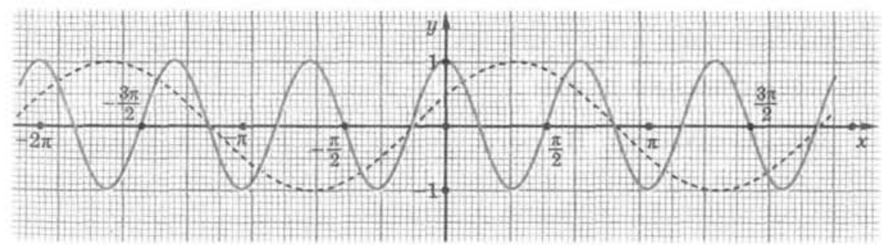


Рис. 544

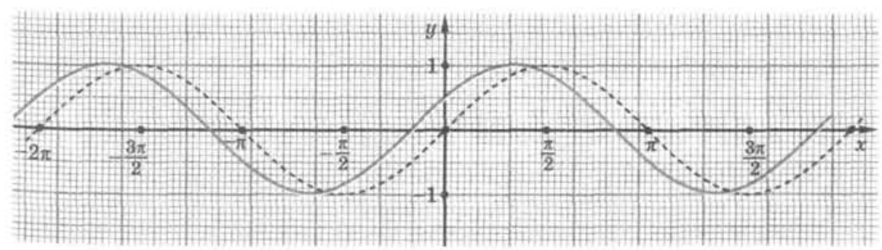


Рис. 545

12—2149

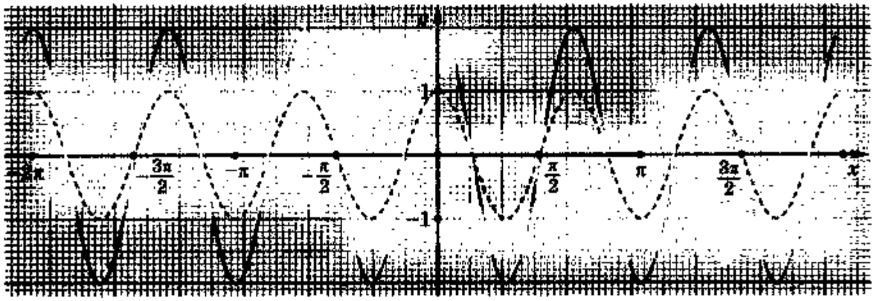


Рис. 546

При преобразованиях графика функции $y = f(x)$ в соответствии с формулами $y = f(x) + c$ (*сдвиг вдоль оси ординат*), $y = f(x + c)$ (*сдвиг вдоль оси абсцисс*), $y = -f(x)$ (*симметрия относительно оси абсцисс*), $y = f(-x)$ (*симметрия относительно оси ординат*), $y = kf(x)$ (*растяжение от оси абсцисс или сжатие к ней*), $y = f(kx)$ (*сжатие к оси ординат или растяжение от нее*) определенные характеристики функции наследуются.

Отмеченное обстоятельство позволяет упростить исследование функций вида $y = A\sin(kx + b)$ и $y = A\,\mathrm{tg}\,(kx + b)$ — достаточно найти их периоды, точки их нулевых значений, точки максимумов и точки минимумов.

Теорема 18. ***Функции $y = A\sin(kx + b)$ и $y = A\,\mathrm{tg}\,(kx + b)$ периодические, и их наименьшие положительные периоды соответственно равны $\frac{2\pi}{|k|}$ и $\frac{\pi}{|k|}$.***

Доказательство. В соответствии с определением число T есть период функции $y = A\sin(kx + b)$, если при всех значениях аргумента x истинно равенство

$$A\sin(k(x + T) + b) = A\sin(kx + b),$$

или

$$2A\sin\frac{kT}{2}\cos\left(kx + b + \frac{kT}{2}\right) = 0.$$

Это равенство тождественно истинно, если $\sin\frac{kT}{2} = 0$. Поэтому $\frac{kT}{2} = m\pi$, где $m \in Z$, или $T = \frac{2m\pi}{k}$. А из чисел $\frac{2m\pi}{k}$, где $m \in Z$, наименьшим положительным является число $\frac{2\pi}{|k|}$.

Утверждение о периодичности функции $y = A\,\mathrm{tg}\,(kx + b)$ доказывается аналогично.

Следствие. ***Функции $y = A\cos(kx + b)$ и $y = A\,\mathrm{ctg}\,(kx + b)$ периодические, и их наименьшие положительные периоды соответственно равны $\frac{2\pi}{|k|}$ и $\frac{\pi}{|k|}$.***

Для доказательства достаточно использовать тождества

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \mathrm{ctg}\, x = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 2. Исследуем функцию

$$y = -2\frac{1}{2}\cos\left(\left|\frac{2}{3}x\right| + \frac{\pi}{3}\right).$$

Рассмотрим сначала эту функцию на промежутке $[0; +\infty)$, на котором она задается формулой $y = -2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Период этой функции равен $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}$, т. е. 3π.

Найдем точки, в которых значение функции равно нулю:

$$-2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \equiv \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in N_0 \equiv$$
$$\equiv x = \frac{\pi}{4} + \frac{3n\pi}{2},\ n \in N_0.$$

Найдем точки максимумов:

$$-2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{1}{2} \equiv \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \equiv$$
$$\equiv \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2n\pi,\ n \in N_0 \equiv$$
$$\equiv x = \pi + 3n\pi,\ n \in N_0.$$

Найдем точки минимумов:

$$-2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = -2\frac{1}{2} \equiv \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \equiv$$
$$\equiv \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} = 2m\pi,\ m \in N \equiv x = -\frac{\pi}{2} + 3m\pi,\ m \in N.$$

Напомним, что мы пока что рассматриваем только неотрицательные значения аргумента. Поэтому для значений переменной n выбираем только неотрицательные целые числа, на что указывает запись $n \in N_0$.

Отметим полученные точки на оси абсцисс, учитывая, что достаточно рассмотреть промежуток длиной 3π, равный периоду. Нам удобно взять промежуток $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$, левый конец которого есть один из нулей функции. В результате получим точки

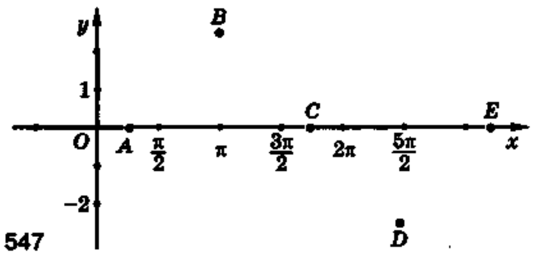
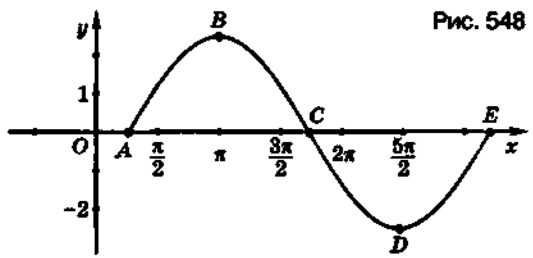


Рис. 547

$A\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)$, $B\left(\pi;\ 2\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{7\pi}{4};\ 0\right)$, $D\left(\frac{5\pi}{2};\ -2\frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{13\pi}{4};\ 0\right)$ (рис. 547). Эти точки отчетливо показывают ход графика на промежутке $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{13\pi}{4}\right]$, который приведен на рисунке 548. График функции на промежутке $\left(\frac{13\pi}{4};\ +\infty\right)$ получается из графика, представленного на рисунке 549, сдвигами на $3\pi n$, $n \in N$, в положительном направлении оси абсцисс. Для получения графика на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ найдем точку пересечения графика функции с осью ординат: $-2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\cdot 0+\frac{\pi}{3}\right)=-1\frac{1}{4}$. В результате получим график на промежутке $[0;+\infty)$ (рис. 550).

Для получения графика на $\boldsymbol{R}$ учтем, что функция $y=-2\frac{1}{2}\cos\left(\left|\frac{2}{3}x\right|+\frac{\pi}{3}\right)$ — четная, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат (рис. 551).

Рис. 548



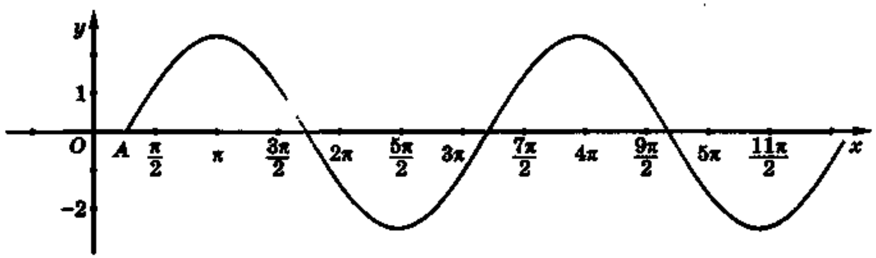


Рис. 549

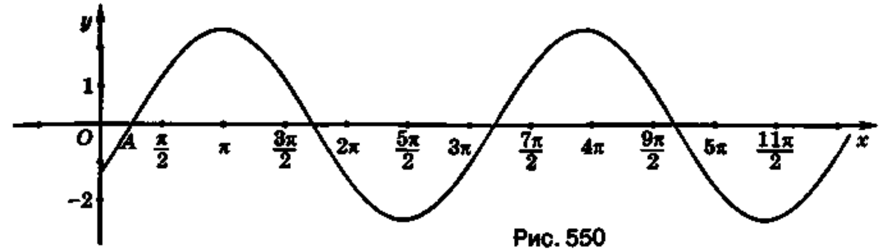


Рис. 550

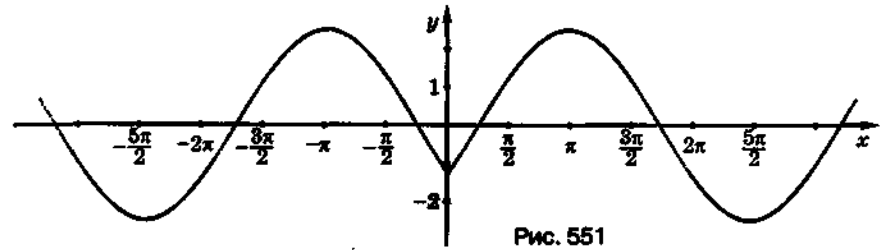


Рис. 551

Пример 3. Исследуем функцию $z=\cos^2 t$.

Учитывая, что $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$, данную функцию можно записать в виде $z=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$. Теперь понятен ход построения графика:

сжатие графика функции $z=\cos t$ в 2 раза к оси ординат (рис. 552);

сдвиг графика функции $z=\cos 2t$ на 1 вдоль оси ординат (рис. 553);

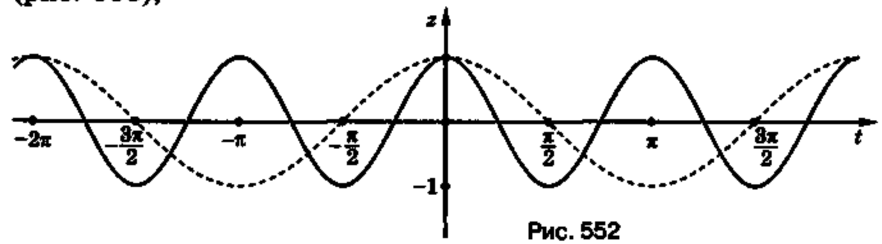


Рис. 552

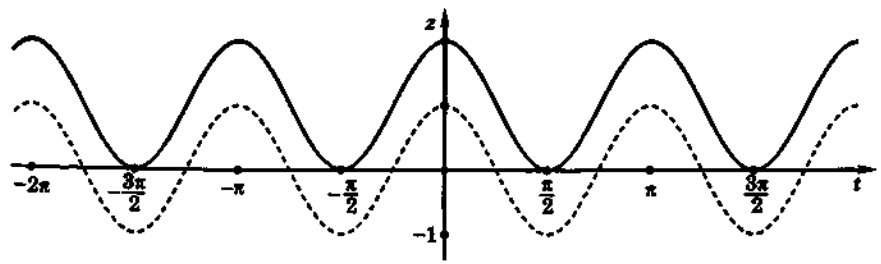


Рис. 553

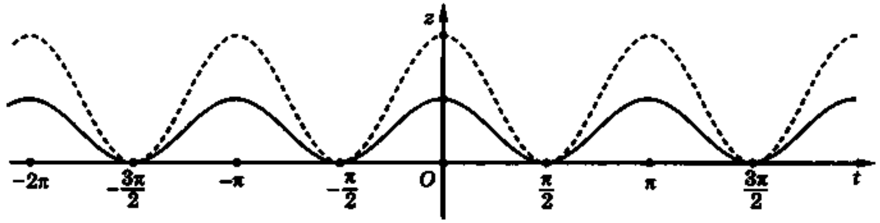


Рис. 554

сжатие графика функции $z = 1 + \cos 2t$ в 2 раза к оси абсцисс (рис. 554).

Многие реальные процессы описываются функциями вида

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Такие процессы называются *гармоническими колебаниями*.

Если на прямой, по которой движется на пружине шарик C, ввести координаты так, чтобы в положении равновесия координата x шарика C была равна нулю, оттянуть шарик в положительном направлении на расстояние A и в момент времени t, равный нулю, отпустить его (рис. 555), то зависимость координаты x шарика C от времени t будет выражаться законом $x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, где ω — некоторый коэффициент, характеризующий жесткость пружины.

Если колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных конденсатора C и катушки индуктивности L (рис. 556), имеет некоторый запас энергии, например ненулевой заряд в конденсаторе, то по этой цепи пойдет электрический ток, а напряжение U на обкладках конденсатора будет изменяться по закону $U = U_0\sin(\omega t + \alpha)$, где ω — некоторая характеристика контура, которая определяется параметрами конденсатора и катушки, U_0 и α определяются состоянием цепи в начальный момент времени.

Гармоническое колебание целиком определяется параметрами A, ω и φ, которые соответственно называются *амплитудой*,

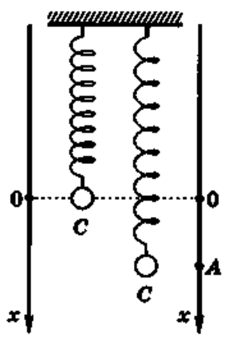


Рис. 555

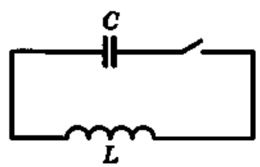


Рис. 556

угловой скоростью (или *круговой частотой*), *начальной фазой колебания*. Период такой функции равен $\frac{2\pi}{\omega}$, его называют *периодом гармонического колебания*.

Гармонические колебания часто приходится складывать. В механике это связано с тем, что на точку может действовать несколько сил, каждая из которых вызывает гармонические колебания. В электротехнике и радиотехнике сложение колебаний происходит при наложении токов.

Пример 4. Найдем амплитуду и фазу гармонического колебания $u = 60\sin 2t + 11\cos 2t$.

Выполним преобразования:

$$u = 60\sin 2t + 11\cos 2t \equiv$$

$$\equiv u = \sqrt{60^2 + 11^2}\left(\frac{60}{\sqrt{60^2 + 11^2}}\sin 2t + \frac{11}{\sqrt{60^2 + 11^2}}\cos 2t\right) \equiv$$

$$\equiv u = 61\left(\frac{60}{61}\sin 2t + \frac{11}{61}\cos 2t\right) \equiv$$

$$\equiv u = 61(\cos\alpha\sin 2t + \sin\alpha\cos 2t),$$

$$\text{где } \frac{60}{61} = \cos\alpha \text{ и } \frac{11}{61} = \sin\alpha \equiv u = 61\sin(2t + \alpha).$$

Значит, амплитуда и начальная фаза колебания соответственно равны 61 и $\arcsin\frac{11}{61}$.

Отметим, что период суммы или разности двух гармонических колебаний с разными соизмеримыми круговыми частотами равен наименьшему общему кратному периодов этих колебаний.

Пример 5. Исследуем функцию $V = 2\sqrt{3}\sin y + \cos 2y$.

Период функции равен НОК $(2\pi; \pi)$, т. е. 2π.

Найдем критические точки функции:

$$V' = 2\sqrt{3}\cos y - 2\sin 2y;$$

$$2\sqrt{3}\cos y - 2\sin 2y = 0 \equiv 2\sqrt{3}\cos y - 4\sin y\cos y = 0 \equiv$$

$$\equiv 4\cos y\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin y\right) = 0 \equiv \cos y = 0$$

$$\text{или } \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \equiv y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$$

$$\text{или } y = (-1)^l\cdot\frac{\pi}{3} + l\pi,\ l \in \mathbf{Z}.$$

Результаты дальнейшего исследования на промежутке $[0; 2\pi]$, равном периоду, представлены в таблице.

y	0	$\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$	2π
V'	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0
V	1	↗	2,5, макс.	↘	$2\sqrt{3}-1$, мин.	↗	2,5, макс.	↘	$-2\sqrt{3}-1$, мин.	↗	1

Для уточнения хода графика найдем точки его пересечения с осью абсцисс:

$$2\sqrt{3}\sin y+\cos 2y=0\equiv 2\sqrt{3}\sin y+1-2\sin^2 y=0\equiv$$

$$\equiv 2\sin^2 y-2\sqrt{3}\sin y-1=0\equiv$$

$$\equiv \sin y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}\ \text{или}\ \sin y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}\ \equiv$$

$$\equiv y=\arcsin\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{Z}\ \text{или}\ y=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2},\ l\in \boldsymbol{Z}.$$

Из этих чисел в промежуток $[0; 2\pi]$ попадают числа $\arcsin\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}+2\pi$ и $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$, приближенно равные 6,03 и 3,39.

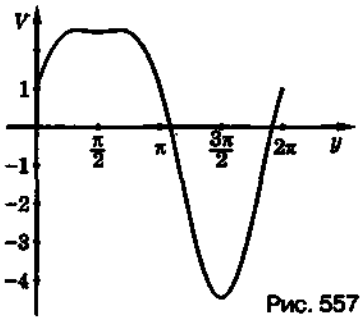


Рис. 557

Проведенное исследование позволяет начертить график функции на промежутке $[0; 2\pi]$ (рис. 557). График функции на всей координатной прямой получается сдвигами на $2n\pi$, $n\in \boldsymbol{Z}$, по оси абсцисс (рис. 558).

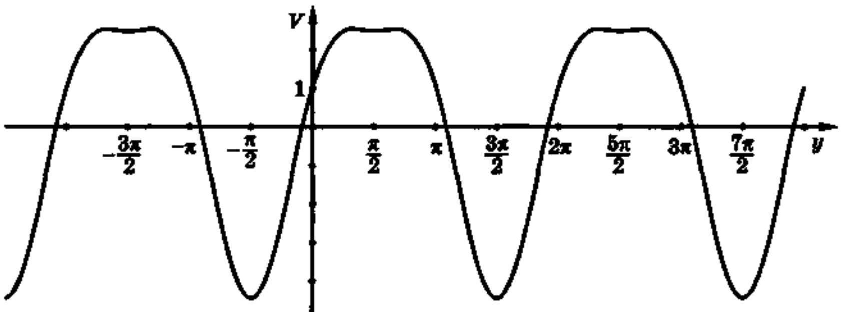


Рис. 558

? 1. Как из графика функции $y=f(x)$ получить график функции $y=f(x)+c$; график функции $y=f(x+c)$?

2. Как из графика функции $y=f(x)$ получить график функции $y=-f(x)$; график функции $y=f(-x)$?

3. Как из графика функции $y=f(x)$ получить график функции $y=|f(x)|$; график функции $y=f(|x|)$?

4. Как из графика функции $y=f(x)$ получить график функции $y=f(kx)$ при $k>1$; график функции $y=f(kx)$ при $0<k<1$?

5. Чему равен период функции $A\sin(kx+b)$; $y=A\operatorname{tg}(kx+b)$; $y=A\cos(kx+b)$; $y=A\operatorname{ctg}(kx+b)$?

6. Какой процесс называют гармоническим колебанием?

7. Что называют амплитудой, круговой частотой, периодом, начальной фазой гармонического колебания?

1253. Перепишите таблицу в тетрадь и, заполнив пропуски, укажите основные свойства тригонометрических функций.

Свойство	Функция			
	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\operatorname{tg} x$	$y=\operatorname{ctg} x$
Область определения	$\boldsymbol{R}$			$\boldsymbol{R}$, кроме чисел $n\pi$
Область значений				
Четность		Четная		
Наименьший положительный период			π	
Точки пересечения с осью абсцисс	$(n\pi; 0)$			
Точка пересечения с осью ординат				Нет
Промежутки положительных значений			$\left(n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$	
Промежутки отрицательных значений				
Промежутки возрастания				
Промежутки убывания				
Точки минимума		$\pi+2n\pi$		Нет

Свойство	Функция			
	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Минимумы	-1			
Точки максимума				
Максимумы				

1254. На каждом из рисунков 559—563 в пределах одного периода представлены две тангенсоиды, одна из них получается из другой определенным преобразованием. Запишите уравнение сплошной тангенсоиды и преобразование, которым она получена из штриховой тангенсоиды, учитывая рисунок:

а) 559; в) 561; д) 563.
б) 560; г) 562;

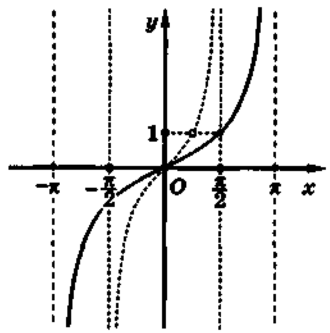


Рис. 559

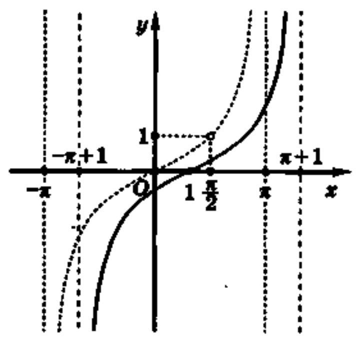


Рис. 560

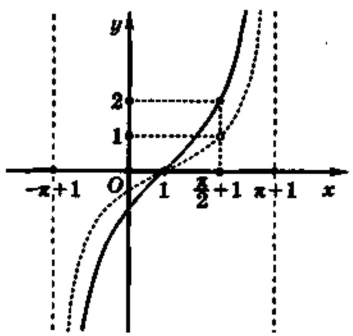


Рис. 561

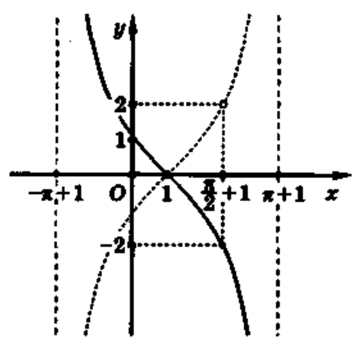


Рис. 562

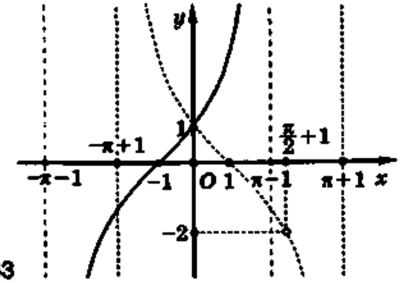


Рис. 563

1255. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = 3\cos 2x - 1$; в) $y = 2 - \operatorname{tg} 3x$;
б) $y = 2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; г) $1 + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x$.

1256. Найдите период функции:

а) $y = \sin \pi x$; в) $y = \operatorname{tg} 3\pi x$;
б) $y = \cos\frac{\pi}{2}x$; г) $y = \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}x$.

1257. Постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$; г) $y = 3\sin\frac{x}{3}$; ж) $y = -3\cos 1\frac{1}{2}x$;
б) $y = -\frac{3}{2}\cos 3x$; д) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 3x$; з) $y = \frac{5}{2}\sin\frac{4}{3}x$;
в) $y = -2\sin 2x$; е) $y = -2\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$; и) $y = -3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}x$.

1258. Исследуйте функцию f и постройте ее график, учитывая, что:

а) $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; е) $f(x) = 4\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$;
б) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; ж) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$;
в) $f(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; з) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right)$;
г) $f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$; и) $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6} - 3x\right)$.
д) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$;

1259. Найдите период, нули и постройте график функции:

а) $y = \sin\frac{4}{3}x$; г) $y = \operatorname{ctg}\frac{5}{6}x$; ж) $y = \cos\frac{4}{3}x$;
б) $y = \cos\frac{5}{3}x$; д) $y = \operatorname{ctg}\frac{5}{3}x$; з) $y = \operatorname{ctg}\frac{2}{3}x$;
в) $y = \operatorname{tg}\frac{4}{3}x$; е) $y = \sin\frac{2}{3}x$; и) $y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$.

1260. Найдите период, нули и постройте график функции:

а) $y=2\sin\left(\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

б) $y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

в) $y=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

г) $y=-2\operatorname{ctg}\left(3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

д) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}(x-\pi)\right)$;

е) $y=-2\cos\left(\frac{2}{3}(x-\pi)\right)$;

ж) $2\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

з) $y=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

1261. Точка выполняет гармонические колебания по закону $x(t)=10\sin\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{3}\right)$. Определите, в какой ближайший к началу движения момент времени сдвиг точки:

а) максимальный;

б) равен 0;

в) равен 5;

г) равен −10.

1262. Определите амплитуду A, период T, круговую частоту w и начальную фазу φ гармонического колебания:

а) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y=7\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $y=\cos\left(4t-\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $y=3\cos 3t$;

д) $y=2\sin(3\pi t+1)$;

е) $y=3\cos(4\pi t-2)$.

1263. Постройте график гармонического колебания:

а) $y=3\sin\left(2t+\frac{4\pi}{3}\right)$;

б) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3t+\frac{6\pi}{5}\right)$;

в) $y=\frac{1}{3}\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$;

г) $y=\frac{3}{2}\cos\left(6\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$.

1264. Найдите амплитуду, период, круговую частоту и начальную фазу гармонического колебания, которое определяется законом:

а) $\sin x+\sqrt{3}\cos x$;

б) $\sin x-\cos x$;

в) $3\sin x+4\cos x$;

г) $4\sin x-3\cos x$;

д) $5\sin x-12\cos x$;

е) $-7\sin 2x-24\cos 2x$;

ж) $3\sin 3x+2\sqrt{2}\cos 3x$;

з) $\sin 5x+\cos 5x$;

и) $33\sin 6x-56\cos 6x$;

к) $7\cos\pi x-24\sin\pi x$.

1265. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $8\sin x+15\cos x$;

б) $8\sin x-15\cos x$;

в) $-5\sin x+12\cos x$;

г) $5-7\sin x-24\cos x$;

д) $\sqrt{\sin x-\cos x}$;

е) $\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$.

1266. Докажите, что уравнение $\sqrt{99}\sin x-49\cos x=51$ не имеет корней.

1267. Постройте график функции:

а) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$;

б) $y=\sin 2x-\cos 2x$.

1268. Исследуйте на четность функцию:

а) $y=-\sin t$;

б) $y=-\cos t$;

в) $y=\sin^2 t$;

г) $y=\cos^3 t$;

д) $y=\sin t\cos t$;

е) $y=\sin t+\cos t$;

ж) $y=\sin^2 t-\cos^2 t$;

з) $y=\sin 2x$;

и) $y=\sin 5x$.

1269. Исследуйте на четность функцию:

а) $y=\sin 2x+1$;

б) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$;

д) $y=\operatorname{tg}2x\cos 4x$;

е) $y=\operatorname{tg}3x\sin 2x$;

ж) $y=\frac{\cos x}{x}$;

з) $y=\frac{x}{\sin x}$;

и) $y=\frac{\sin x+\operatorname{tg}x}{x}$.

1270. Постройте график функции:

а) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$;

г) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$;

д) $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$;

е) $y=\sin^2 x$;

ж) $y=|\sin x|$;

з) $y=\sin x+|\sin x|$;

и) $y=\cos x+|\cos x|$;

к) $y=|\operatorname{tg}2x|$;

л) $y=\sin x+\cos x$;

м) $y=\sin x+2\cos x$.

1271. Постройте график функции:

а) $y=\sin x+\cos x$;

б) $y=\sin x-\cos x$;

в) $y=3\sin x+4\cos x$;

г) $y=\sin^2 x$;

д) $y=\cos^2 2x$;

е) $y=\sin^2 2x$;

ж) $y=\sin^2 3x$;

з) $y=\cos^2 3x$;

и) $y=\frac{1}{2}\sin^2 4x$.

1272. Постройте график функции:

а) $y = \sin x + \sin 2x$; г) $y = \cos 2x - \cos 4x$;
б) $y = \sin x + \cos 2x$; д) $y = \sin 3x - \sin 6x$;
в) $y = \cos x - \sin 2x$; е) $y = \sin 3x + \cos 6x$.

1273. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 9\sin^2 y + 6\cos y$.

1274. Исследуйте на четность и периодичность функцию:

а) $y = \sin\sqrt{x}$; б) $y = \sin\sqrt{x^2}$.

1275. Найдите наименьший положительный период T функции $y = \sin\frac{2t}{15} - 3\cos\frac{4t}{21} + \sin\frac{6t}{35}$.

1276. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = \arccos\sqrt{x}$;
б) $y = \arcsin\sqrt{x^2 - 1}$;
в) $y = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1+x^2}$;
г) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$;
д) $y = \operatorname{arcctg}\frac{4x}{x^2+4}$;
е) $y = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;
ж) $y = \arcsin\sqrt{t} + \arccos\sqrt{t}$;
з) $y = \arcsin\sqrt{1+t+t^2} + \arccos\sqrt{1-t+t^2}$;
и) $y = \arccos\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \operatorname{arcctg} t$.

1277. Из вершин A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC к его плоскости возведены перпендикуляры AA_1 и BB_1. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, учитывая, что $A_1C = 20$ м, $A_1A = 12$ м, $B_1C = 24$ м, $B_1B = 8$ м и отрезок A_1B_1 с плоскостью треугольника:

а) не имеет общих точек;
б) имеет общие точки.

1278. *Высотой пирамиды* называется перпендикуляр, проведенный из ее вершины на основание. Боковые ребра треугольной пирамиды равны d. Найдите высоту пирамиды, учитывая, что основанием является:

а) равносторонний треугольник со стороной 1;
б) прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4;
в) треугольник со сторонами 4, 5, 6.

1279. Боковые ребра треугольной пирамиды равны d. Найдите высоту пирамиды, учитывая, что основанием является равнобедренный треугольник с боковой стороной 1 и углом против основания, равным:

а) 120°; б) 135°; в) 150°.

1280. Есть треугольная пирамида $QABC$, у которой основание ABC — равнобедренный треугольник с равными сторонами AB и BC, а боковое ребро QB перпендикулярно плоскости основания. Найдите радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, учитывая, что ребра AQ и AC соответственно равны 13 см и 10 см, а высота QH грани QAC образует с плоскостью основания угол в 60°.

1281. Из точки C к плоскости β под углами 30° и 45° проведены перпендикулярные друг другу наклонные CA и CB. Найдите угол, который с плоскостью β образует перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую AB.

1282. Через вершину A меньшего угла треугольника со сторонами, равными 17 см, 15 см и 8 см, проведена прямая AM, перпендикулярная его плоскости. Определите расстояние от точки M до прямой, содержащей меньшую сторону треугольника, учитывая, что $AM = 112$ см.

1283. Сплавили кусок меди плотностью 8,96 г/см³ и кусок цинка плотностью 7,13 г/см³ и получили 10 дм³ латуни плотностью 8,32 г/см³. Найдите с точностью до десятой килограмма массы взятых кусков.

* * *

1284. Докажите, что если $xy = 1$ и $x > y$, то истинно неравенство $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geqslant 2\sqrt{2}$.

1285. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Какой может быть третья высота этого треугольника?

1286. Определите, какое наибольшее количество простых чисел может встретиться среди 17 последовательных натуральных чисел, больших 3.

27.* Тригонометрические неравенства

Решение неравенств с тригонометрическими выражениями сводится к решению простейших неравенств $t(x) < 0$, $t(x) > 0$, $t(x) \neq 0$, $t(x) \geqslant 0$, $t(x) \leqslant 0$, где $t(x)$ — одно из выражений $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

При решении тригонометрических неравенств удобно пользоваться тригонометрической окружностью, на которой множество значений переменной, удовлетворяющих неравенству, изображается дугой или совокупностью дуг. Поэтому нужно научиться записывать множества чисел, которые изображаются некоторой дугой тригонометрической окружности.

Пример 1. Найдем множество чисел, которые соответствуют точкам дуги AB тригонометрической окружности, расположенным в первой четверти (рис. 564).

Сначала найдем условие, которому удовлетворяют числа из промежутка $[0; 2\pi)$, соответствующие точкам дуги AB. Точка A соответствует числу 0, точка B — числу $\frac{\pi}{2}$. Поэтому множество чисел, которые изображаются всеми точками дуги AB, можно записать промежутком $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ или неравенством $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Теперь учтем, что если точка тригонометрической окружности изображает число x, то эта точка изображает и любое число вида $x + 2k\pi$, где k — целое число. Значит, множество чисел, которые изображаются точками дуги AB, удовлетворяют неравенству

$$0 + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ или } 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

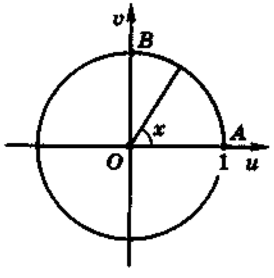


Рис. 564

Это множество можно представить записью

$$\left[2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right],\ k \in Z.$$

Пример 2. Точки P и Q соответствуют числам $\frac{5\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Запишем множество чисел, которые соответствуют дуге PQ (рис. 565).

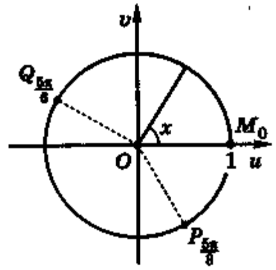


Рис. 565

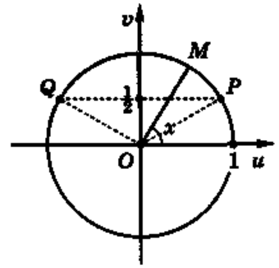


Рис. 566

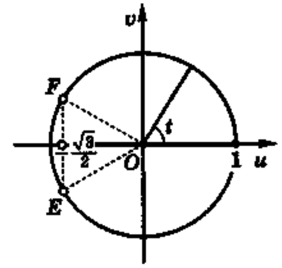


Рис. 567

Понятно, что вначале нам нужно записать один промежуток, длина которого не превосходит 2π, а числа соответствуют точкам дуги PQ. Учтем, что промежуток $[a; b]$ представляет все числа от наименьшего числа a до наибольшего числа b. Это те числа, которые встретятся при движении в сторону увеличения от наименьшего числа a к наибольшему числу b. Если двигаться по дуге PQ против часовой стрелки, то начинать нужно с точки P, которой будет соответствовать наименьшее число промежутка. Если точке P соответствует число $\frac{5\pi}{3}$, то точке M_0 будет соответствовать число 2π, а точке Q — число $2\pi + \frac{5\pi}{6}$. Получили, что числа из промежутка $\left[\frac{5\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right]$ соответствуют точкам отмеченной дуги PQ. Поэтому все числа, соответствующие точкам дуги PQ, удовлетворяют неравенству $\frac{5\pi}{3} + 2m\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi + 2m\pi$, $m \in Z$. Это множество можно выразить и неравенством $-\frac{\pi}{3} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in Z$.

Пример 3. Решим неравенство $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$.

Точки M тригонометрической окружности, которые изображают числа x, удовлетворяющие неравенству $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$, имеют ординату, большую $\frac{1}{2}$. Множество таких точек на рисунке 566 — выделенная дуга PQ. Точке P соответствует число $\frac{\pi}{6}$, точке Q — число $\frac{5\pi}{6}$. Поэтому искомое множество чисел представляется неравенством $\frac{\pi}{6} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in Z$.

Пример 4. Решим неравенство $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Множество точек тригонометрической окружности, которые соответствуют числам, удовлетворяющим неравенству

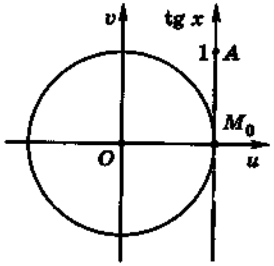


Рис. 568

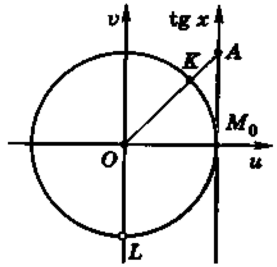


Рис. 569

$\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, на рисунке 567 изображено дугой EF. Точкам E и F при движении в положительном направлении соответствуют числа $-\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Значит, множеством решений неравенства является промежуток $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2l\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2l\pi\right)$.

Пример 5. Решим неравенство $\operatorname{tg} u \leqslant 1$.

Покажем на оси тангенсов те значения, которые выделяются данным неравенством. Это луч AM_0 (рис. 568). Теперь отметим на правой половине тригонометрической окружности точки, которые проектируются в точки луча AM_0 на оси тангенсов. Это дуга KL (рис. 569), из которой исключена одна концевая точка. Остается записать множество чисел, соответствующих отмеченным точкам окружности. Точка K соответствует числу $\frac{\pi}{4}$, точка L — числу $-\frac{\pi}{2}$. С учетом того, что период тангенса равен π, искомое множество чисел задается неравенством $\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant u < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6. Решим неравенство $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$.

Данное неравенство выделяет на оси котангенсов полупрямую AB (рис. 570). В выделенную полупрямую проектируются точки дуги RM_0 верхней полуокружности, из которой исключены концевые точки. Поскольку точка M_0 соответствует числу 0, а точка R — числу $\frac{5\pi}{6}$, то с учетом периодичности котангенса получаем, что искомое множество чисел можно представить неравенством $m\pi < x < \frac{5\pi}{6} + m\pi$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

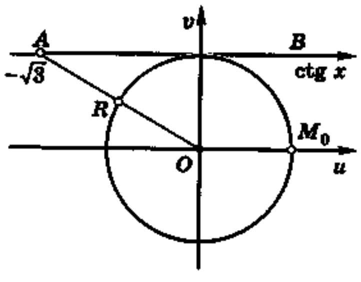


Рис. 570

Пример 7. Решим неравенство

$$2\cos^2\frac{2y+\pi}{6} - 3\cos\frac{2y+\pi}{6} > 2.$$

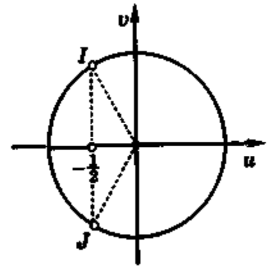


Рис. 571

Для сокращения записей примем $\cos\frac{2y+\pi}{6} = z$, $\frac{2y+\pi}{6} = t$. Тогда получим неравенство $2z^2 - 3z > 2$, которое равносильно неравенству $2\left(z + \frac{1}{2}\right)(z - 2) > 0$. Поэтому исходное неравенство сводится к неравенству $2\left(\cos t + \frac{1}{2}\right)(\cos t - 2) > 0$, равносильному данному неравенству. Учитывая, что $\cos t \leqslant 1$, получаем, что значение множителя $\cos t - 2$ отрицательно при всех значениях переменной y. Поэтому множитель $\cos t + \frac{1}{2}$ должен быть также отрицательным, т. е. должно выполняться неравенство $\cos t + \frac{1}{2} < 0$. Как показывает рисунок 571, решениями этого неравенства являются числа t, удовлетворяющие условию $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi < t < \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Вернувшись к переменной y, получаем неравенство $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi < \frac{2y+\pi}{6} < \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, из которого находим, что $1{,}5\pi + 6n\pi < y < 3{,}5\pi + 6n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $(1{,}5\pi + 6n\pi;\ 3{,}5\pi + 6n\pi)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 8. Найдем область определения функции

$$y = \sqrt[4]{\cos x} - \frac{1{,}8}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg} x}}.$$

Нахождение области определения требует учесть следующее: подкоренное выражение $\cos x$ корня $\sqrt[4]{\cos x}$ четной степени должно быть неотрицательным, а подкоренное выражение $1 - \operatorname{ctg} x$ корня $\sqrt{1 - \operatorname{ctg} x}$ четной степени, который стоит в знаменателе, должно быть положительным. Значит, должна выполняться система неравенств $\begin{cases} \cos x \geqslant 0, \\ 1 - \operatorname{ctg} x > 0. \end{cases}$ Рисунок 572 показывает, что решением первого неравенства системы является совокупность множеств $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$. Рисунок 573 позво-

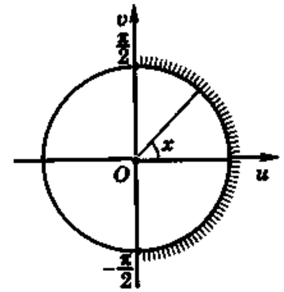


Рис. 572

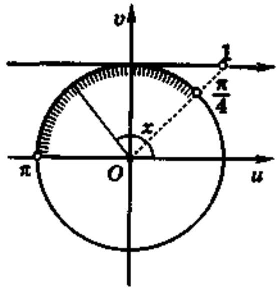


Рис. 573

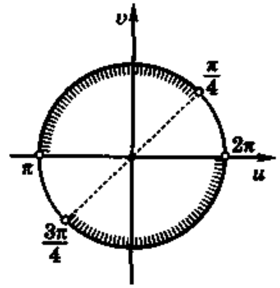


Рис. 574

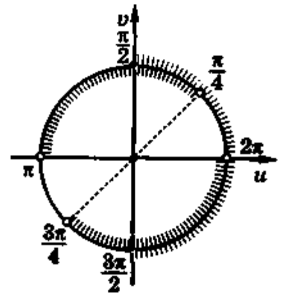


Рис. 575

ляет записать решение второго неравенства системы — совокупность множеств $\left(\frac{\pi}{4}+l\pi;\ \pi+l\pi\right)$. Из полученных двух совокупностей промежутков нужно выбрать их общую часть, для этого сведем эти совокупности на одной тригонометрической окружности. На рисунке 574 показаны решения неравенства $1-\mathrm{ctg}\,x>0$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$ — общем периоде косинуса и котангенса. Присоединив к ним решения неравенства $\cos x\geqslant 0$, получаем рисунок 575, который позволяет усмотреть, что на промежутке $[0;\ 2\pi]$ решениями системы неравенств $\begin{cases}\cos x\geqslant 0,\\ 1-\mathrm{ctg}\,x>0\end{cases}$ является множество $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$. Наконец, учитывая, что общим периодом косинуса и котангенса является число 2π, получаем множество решений системы:

$$\left(\frac{\pi}{4}+2m\pi;\ \frac{\pi}{2}+2m\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2}+2m\pi;\ 2\pi+2m\pi\right),\ m\in\mathbf{Z}.$$

Отметим, что это множество можно записать и так:

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2n\pi;2n\pi\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi;\ \frac{\pi}{2}+2n\pi\right],\ n\in\mathbf{Z}.$$

? 1. Какую прямую называют осью синусов; осью косинусов; осью тангенсов; осью котангенсов?

2. Как с помощью тригонометрической окружности по числовому промежутку найти соответствующий числовой промежуток на оси синусов; оси косинусов; оси тангенсов; оси котангенсов?

3. Как с помощью тригонометрической окружности найти числовой промежуток, соответствующий данному промежутку на оси синусов; оси косинусов; оси тангенсов; оси котангенсов?

1287. С помощью тригонометрической окружности найдите множество значений синуса, если его аргумент принадлежит промежутку:

а) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$; в) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{6}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

1288. С помощью тригонометрической окружности найдите множество значений косинуса, если его аргумент принадлежит промежутку:

а) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$; в) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{6}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

1289. С помощью тригонометрической окружности найдите множество значений тангенса, если его аргумент принадлежит промежутку:

а) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$; в) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{6}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

1290. С помощью тригонометрической окружности найдите множество значений котангенса, если его аргумент принадлежит промежутку:

а) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$; в) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{6}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

1291. Укажите на тригонометрической окружности те точки, что значения синусов соответствующих им чисел принадлежат промежутку:

а) $[0;\ 1]$; в) $\left[\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; д) $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$; ж) $\left[-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$;

б) $[-1;\ 0]$; г) $\left[\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; е) $\left[-\frac{5}{2};\ \frac{1}{2}\right]$; з) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$.

1292. Укажите на тригонометрической окружности те точки, что значения косинусов соответствующих им чисел принадлежат промежутку:

а) $[0;\ 1]$; в) $\left[\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; д) $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$; ж) $\left[-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$;

б) $[-1;\ 0]$; г) $\left[\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; е) $\left[-\frac{5}{2};\ \frac{1}{2}\right]$; з) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$.

1293. Укажите на тригонометрической окружности те точки, что значения тангенсов соответствующих им чисел принадлежат промежутку:

а) $[0;\ 1]$; г) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$; ж) $\left[-\sqrt{3};+\infty\right)$;

б) $[-1;\ 0]$; д) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3};\ \sqrt{3}\right]$; з) $\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right]$;

в) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3};\ 1\right]$; е) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3};\ 1\right]$; и) $(-\infty;\ -1]$.

1294. Укажите на тригонометрической окружности те точки, что значения котангенсов соответствующих им чисел принадлежат промежутку:

а) $[0; 1]$; г) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$; ж) $[-\sqrt{3}; +\infty)$;

б) $[-1; 0]$; д) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right]$; з) $(-\infty; -\sqrt{3}]$;

в) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right]$; е) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right]$; и) $(-\infty; -1]$.

1295. Найдите значения переменной из данного промежутка, удовлетворяющие данному неравенству, учитывая, что эти неравенство и промежуток следующие:

а) $\sin x > \frac{1}{2}$; $[0; \pi]$; ж) $\cos x > \frac{1}{2}$; $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $[-\pi; 0]$; з) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; $[0; \pi]$; и) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

г) $\sin x < -\frac{1}{2}$; $[-\pi; 0]$; к) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

д) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; л) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

е) $\cos x < -\frac{1}{2}$; $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; м) $\operatorname{tg} x \leqslant -1$; $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

1296. Решите неравенство:

а) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$; з) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$; е) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\sin x < \frac{\pi}{2}$.

1297. Решите неравенство:

а) $\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$; д) $2\cos x - 1 \geqslant 0$;

б) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; е) $2\sin x + \sqrt{2} \geqslant 0$;

в) $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$; ж) $2\cos x - \sqrt{3} \leqslant 0$;

г) $\operatorname{tg} x < -1$; з) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geqslant 0$.

1298. Решите неравенство:

а) $\sin 2x < \frac{1}{2}$; б) $\cos \frac{x}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin \frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$;

г) $\operatorname{tg} 5x > 1$; ж) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) > 1$;

д) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$; з) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$.

1299. Решите неравенство:

а) $\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{1}{2}$;

б) $\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $4\sin 2x \cos 2x \geqslant \sqrt{2}$;

г) $\cos \frac{\pi}{8} \cos x - \sin x \sin \frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1300. Решите неравенство:

а) $\operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3}$; д) $3\sin \frac{x}{4} \geqslant 2$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \leqslant 1$; е) $4\cos \frac{x}{3} < -3$;

в) $\operatorname{ctg} 3x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$; ж) $5\operatorname{tg} 2x \leqslant 3$;

г) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) > -\sqrt{3}$; з) $0{,}5\sin 4x < -0{,}2$.

1301. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \cos x < 0{,}5, \\ \cos x > -0{,}5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos x < \frac{1}{2}, \\ \sin x \leqslant \frac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}, \\ \sin x \geqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$

1302. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2}\cos 2x \leqslant 1$; е) $\sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $2\sin 3x > -1$; ж) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$;

в) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\cos^2 x - \cos x < 0$;

г) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$;

д) $\cos\left(\frac{x}{3} + 2\right) \geqslant \frac{1}{2}$; к) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 > 0$.

1303. Решите неравенство:

а) $2\sin^2 x - 5\sin x + 3 > 0$;
б) $\sin^2 x > \cos x$;
в) $|\sin x| > \frac{1}{2}$;
г) $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$;
д) $|\operatorname{ctg} x| > \sqrt{3}$;
е) $|\cos x| < \frac{1}{2}$.

1304. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \sin 3x > \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \operatorname{tg} 2x < 1, \\ \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\sqrt{3}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0, \\ \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sin x < \frac{4}{7}, \\ \operatorname{ctg} x < 2. \end{cases}$

1305. Решите неравенство:

а) $\cos x^2 \geqslant \frac{1}{2}$;
б) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x < 1$;
в) $\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x < -\sqrt{2}$;
г) $\cos 2x + \cos x > 0$;
д) $\frac{\cos x}{1 + \cos 2x} < 0$;
е) $\sin 3x > \cos 3x$;
ж) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x - 4 > 0$;
з) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 < 0$;
и) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x < 0$.

1306. Решите неравенство:

а) $3\cos^2 x \sin x - \sin^2 x < -1$;
б) $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geqslant 3\operatorname{tg} x$;
в) $\frac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1} \leqslant 1$;
г) $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$;
д) $\cos 2x \cos 5x < \cos 3x$;
е) $\sin 2x \sin 3x - \cos 3x > \sin 10x$;
ж) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$;
з) $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

1307. Решите неравенство:

а) $\sin \pi x < \frac{1}{2}$;
б) $\sin(\cos x) > \frac{1}{2}$;
в) $\arcsin x < \frac{\pi}{3}$;
г) $3\sin x\cos x - \cos^2 x \geqslant 0$;
д) $\sin^2 x + \cos x > 0$;
е) $\cos(3 - 4x) + \cos(3 + 4x) \geqslant \sqrt{2\cos^2 2x + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}}$.

1308. Решите неравенство:

а) $\sin x > \sin 3x$;
б) $|\sin x| < |\cos x|$;
в) $\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant 6\sin x - 1$;
г) $\frac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 2x + \cos x} \leqslant 2$;
д) $\sqrt{2 + 4\cos x} \geqslant \frac{1}{2} + 3\cos x$;
е) $\sin x > \sqrt[3]{3\sin x - 2}$.

1309. Отрезок длиной m, концы которого принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, составляет с одной из них угол в 45°, а с другой — угол в 30°. Найдите длину части линии пересечения плоскостей, заключенную между перпендикулярами, проведенными к ней из концов данного отрезка.

1310. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 24 см. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, проходящей через гипотенузу и образующей угол в 30° с плоскостью треугольника.

1311. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см. Через меньший катет одного основания и противолежащую вершину другого основания проведено сечение, составляющее с основанием угол в 45°. Найдите:

а) высоту призмы; б) площадь сечения.

1312. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена такая плоскость ADM, что двугранный угол $BADM$ равен 60°. Найдите сторону ромба, учитывая, что $\angle BAD = 45°$ и расстояние от точки B до плоскости ADM равно $4\sqrt{3}$.

1313. Грузовой автомобиль 315 км ехал с одной скоростью, а затем снизил ее на $\frac{1}{9}$ и с этой скоростью ехал еще 5 ч. Найдите пройденный автомобилем путь, учитывая, что средняя скорость на всем пути оказалась равной 59,5 км/ч.

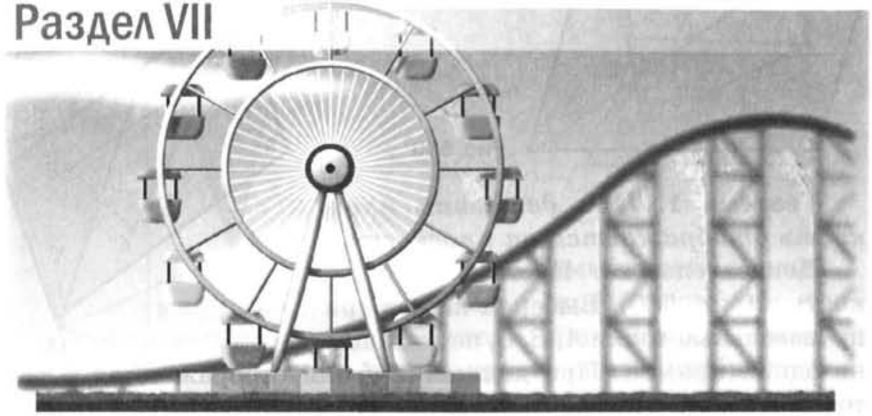
* * *

1314. Докажите, что если $ad - bc = 1$, то $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geqslant \sqrt{3}$.

1315. Три равные окружности проходят через точку Q и попарно пересекаются в точках A, B и C. Найдите угол BAC, учитывая, что $AQ = BC$.

1316. Из квадратов размерами 1×1, 2×2, 3×3 составили квадрат размерами 23×23. Какое наименьшее количество квадратов размерами 1×1 могло быть при этом использовано?

Раздел VII



ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

28.* Пространственные симметрии

Вы уже изучали преобразования плоскости, и в частности движения плоскости — осевую симметрию (рис. 576), центральную симметрию (рис. 577), параллельный перенос (рис. 578), поворот (рис. 579). Понятие преобразования пространства определяется так же, именно *преобразованием пространства* называется функция, которая каждой точке пространства ставит в соответствие единственную точку этого пространства, разным точкам — разные, и множеством значений этой функции является все пространство. *Движением пространства* называется такое преобразование пространства, которое сохраняет расстояния между точками.

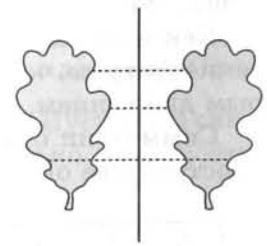


Рис. 576

Так же, как для движения плоскости, доказывается, что при движении в пространстве прямая отображается на прямую, луч — на луч, отрезок — на отрезок, сохраняются углы между прямыми.

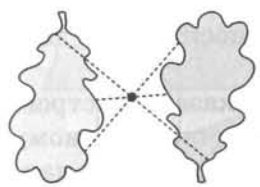


Рис. 577

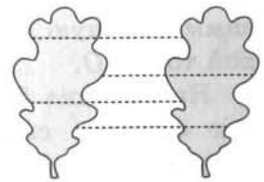


Рис. 578

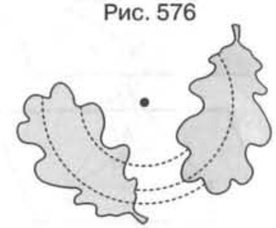


Рис. 579

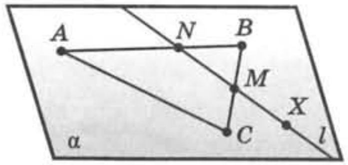


Рис. 580

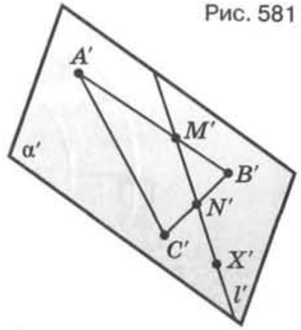


Рис. 581

Теорема 1. ***При движении плоскость отображается на плоскость.***

Доказательство. Пусть есть плоскость α (рис. 580). Выберем на ней три произвольные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. При движении f они отображаются в три точки A', B', C', также не лежащие на одной прямой (рис. 581). Через точки A', B', C' проведем плоскость α'. Докажем, что при движении f плоскость α отображается на плоскость α'. Пусть X — произвольная точка плоскости α. Через нее проведем прямую l, пересекающую треугольник ABC в точках M и N. Пусть прямая l при движении f отображается на прямую l'. Точки M и N прямой l отображаются в точки M' и N' треугольника $A'B'C'$. Поскольку этот треугольник принадлежит плоскости α', то и его точки M' и N' принадлежат этой плоскости. Значит, прямая l' принадлежит плоскости α'. Поскольку точка X принадлежит прямой l, то ее образ X' принадлежит прямой l', а значит, и плоскости α'. Таким образом, точки плоскости α отображаются при движении в точки плоскости α'.

Рассуждая аналогично, получим, что в каждую точку Y' плоскости α' отображается некоторая точка Y плоскости α.

Как и на плоскости, в пространстве *равными* называются такие фигуры, которые отображаются друг на друга некоторым движением.

Симметрии относительно точки и относительно прямой в пространстве определяются так же, как и на плоскости.

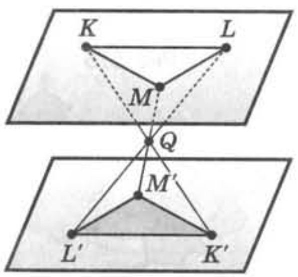


Рис. 582

Центральной симметрией с центром O называется преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается в точку, симметричную ей относительно данной точки O.

На рисунке 582 показано построение фигуры, симметричной данному треугольнику KLM относительно данной точки Q.

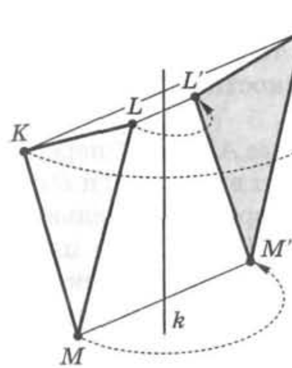


Рис. 583

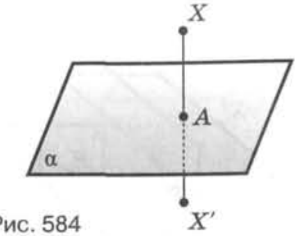


Рис. 584

Осевой симметрией с осью l называется преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается в точку, симметричную ей относительно данной прямой l.

На рисунке 583 показано построение фигуры, симметричной данному треугольнику KLM относительно прямой k.

Кроме симметрий относительно точки и относительно прямой в пространстве, рассматривают еще симметрию относительно плоскости. Пусть α — данная плоскость (рис. 584) и X — произвольная точка пространства. Из точки X опустим перпендикуляр XA на плоскость α, и на его продолжении за точку A отложим отрезок AX', равный отрезку AX. Точка X' называется *точкой, симметричной точке X относительно плоскости α.*

Симметрией относительно плоскости α называется преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается в точку, симметричную ей относительно данной плоскости α.

На рисунке 585 показано построение фигуры, симметричной данному треугольнику KLM относительно плоскости α.

Теорема 2. ***Симметрия относительно плоскости является движением.***

Доказательство. Пусть дана симметрия относительно плоскости

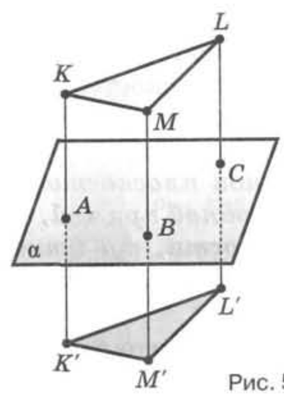


Рис. 585

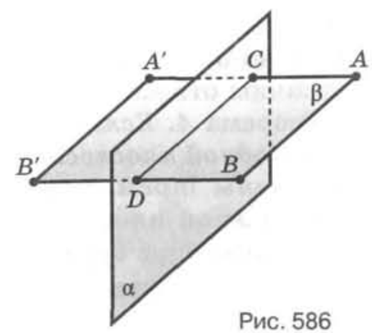


Рис. 586

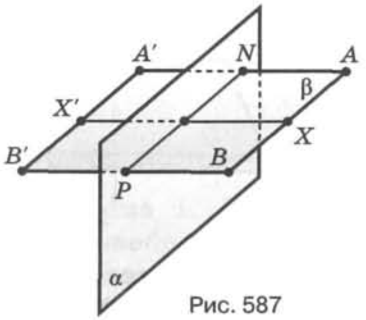


Рис. 587

α (рис. 586). Пусть точки A' и B' симметричны точкам A и B относительно плоскости α. Докажем, что $A'B' = AB$.

Пусть прямые AA' и BB' пересекают плоскость α в точках C и D соответственно. Через параллельные прямые AA' и BB' проведем плоскость β. Она пересекает плоскость α по прямой CD, при этом прямая CD перпендикулярна прямым AA' и BB' и отрезки $A'C$ и $B'D$ соответственно равны отрезкам AC и BD. Значит, в плоскости β отрезки AB и $A'B'$ симметричны относительно прямой CD. Поскольку осевая симметрия является движением, то эти отрезки равны друг другу.

Теорема 3. ***Если относительно данной плоскости две точки одной прямой симметричны двум точкам другой прямой, то относительно этой плоскости прямые симметричны друг другу.***

Доказательство. Пусть есть плоскость α и прямые AB и $A'B'$, причем точки A' и B' симметричны относительно плоскости α точкам A и B соответственно. Докажем, что любая точка X прямой AB имеет симметричную относительно плоскости α точку X' на прямой $A'B'$ (рис. 587).

Пусть прямые AA' и BB' пересекают плоскость α в точках N и P соответственно. Через параллельные прямые AA' и BB' проведем плоскость β. Она пересекает плоскость α по прямой NP, при этом $AA' \perp NP$, $BB' \perp NP$, $A'N = AN$, $B'P = BP$. Значит, в плоскости β прямые AB и $A'B'$ симметричны относительно прямой NP.

На прямой AB выберем произвольно точку X, тогда в плоскости β симметричная ей точка X' лежит на прямой $A'B'$. Прямые XX' и AA' параллельны, так как в плоскости β они обе перпендикулярны прямой NP. Но $AA' \perp \alpha$, поэтому и $XX' \perp \alpha$. Поскольку точки X и X' симметричны в плоскости β относительно оси NP, то $OX = OX'$. Поэтому точки X и X' симметричны относительно плоскости α.

Теорема 4. ***Если относительно данной плоскости три точки одной плоскости, не лежащие на одной прямой, симметричны трем точкам другой плоскости, то относительно этой плоскости первая и вторая плоскости симметричны друг другу.***

Доказательство этого утверждения проведите самостоятельно.

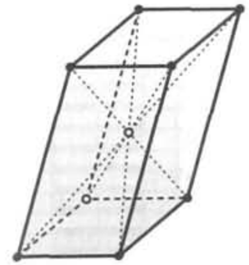


Рис. 588

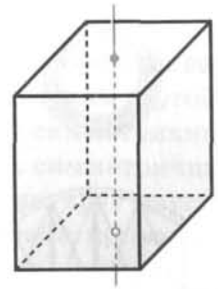


Рис. 589

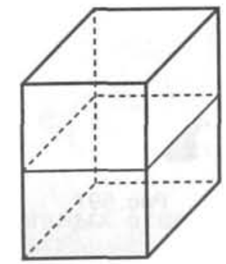


Рис. 590

Есть такие фигуры, которые при некоторой симметрии преобразуются сами в себя. Говорят, что фигура имеет определенную симметрию. В зависимости от того, какой симметрией — центральной, осевой, относительно плоскости — фигура преобразуется сама в себя, отличают *центрально-симметричные, осесимметричные, плоскостносимметричные фигуры.*

Примером центрально-симметричной фигуры является произвольный параллелепипед (рис. 588), так как его диагонали проходят через одну точку, которой они делятся пополам. Прямой параллелепипед в дополнение является осесимметричной фигурой, его осью симметрии является прямая, проходящая через точки пересечения диагоналей оснований (рис. 589). Прямой параллелепипед является и плоскостносимметричной фигурой, его плоскостью симметрии является плоскость, проходящая перпендикулярно боковому ребру через его середину (рис. 590).


Рис. 591

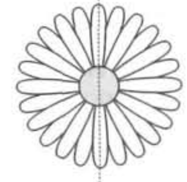


Рис. 592


Рис. 593

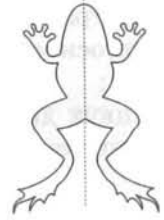


Рис. 594

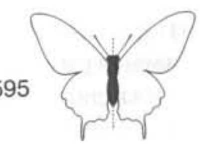


Рис. 595

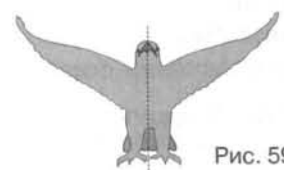


Рис. 596

Рис. 597

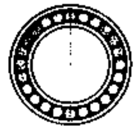


Рис. 598

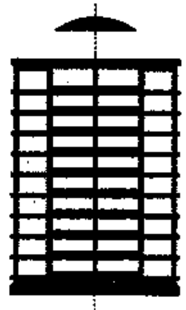


Рис. 599

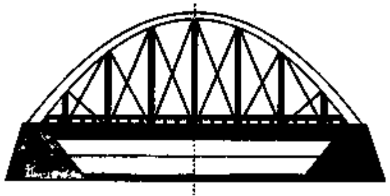


Рис. 600

Рис. 601

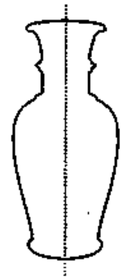


Рис. 602

Симметрия очень распространена в природе. Она проявляется в форме листов и цветов растений (рис. 591, 592), в форме тела человека и животных (рис. 593—596). Симметрия широко используется в технике (рис. 597, 598), архитектуре (рис. 599, 600), изготовлении предметов обихода (рис. 601, 602).

?

1. Что называется преобразованием пространства?
2. Какое преобразование пространства называется движением?
3. На что при движении отображается отрезок; луч; прямая; треугольник; плоскость?
4. Какие величины сохраняются при движении?
5. Какие фигуры пространства называются равными?
6. Какое преобразование пространства называется центральной симметрией; осевой симметрией; симметрией относительно плоскости?
7. Чем задается центральная симметрия; осевая симметрия; симметрия относительно плоскости?
8. Какая фигура называется центрально-симметричной; осесимметричной; плоскостносимметричной?

1317. Докажите, что:

а) две точки пространства имеют единственную плоскость симметрии;
б) каждая точка плоскости симметрии симметрична сама себе;
в) каждая точка, лежащая в плоскости симметрии двух точек, равноудалена от этих точек;
г) если точка равноудалена от двух данных точек, то она лежит в плоскости симметрии этих точек.

1318. Докажите, что:

а) две точки имеют единственный центр симметрии;

б) центр симметрии симметричен сам себе;
в) если относительно некоторого центра две точки одной прямой симметричны двум точкам другой прямой, то относительно этого центра прямые симметричны друг другу;
г) прямые пространства, симметричные относительно некоторого центра, параллельны друг другу;
д) соответственные отрезки прямых, симметричных относительно некоторого центра, равны друг другу;
е) если относительно некоторого центра три точки, не лежащие на одной прямой, одной плоскости симметричны трем точкам другой плоскости, то относительно этого центра плоскости симметричны друг другу;
ж) плоскости, симметричные относительно некоторого центра, параллельны друг другу.

1319. Докажите, что:

а) две точки, симметричные относительно некоторой оси, лежат на прямой, пересекающей ее под прямым углом в такой точке, которая является серединой отрезка, соединяющего данные точки;
б) каждая точка оси симметрии симметрична сама себе;
в) две точки пространства имеют бесконечно много осей симметрии;
г) две точки пространства, симметричные относительно данной оси, равноудалены от любой точки этой оси;
д) если какая-либо точка равноудалена от двух других точек, то она лежит на оси симметрии этих точек;
е) если относительно некоторой оси две точки одной прямой симметричны двум точкам другой прямой, то относительно этой оси прямые симметричны друг другу;
ж) если относительно некоторой оси три точки, не лежащие на одной прямой, одной плоскости симметричны трем точкам другой плоскости, то относительно этой оси плоскости симметричны друг другу.

1320. Докажите, что:

а) параллелограмм имеет ось симметрии, которая проходит через точку пересечения его диагоналей и перпендикулярна его плоскости;
б) любая плоская центрально-симметричная фигура имеет в пространстве ось симметрии.

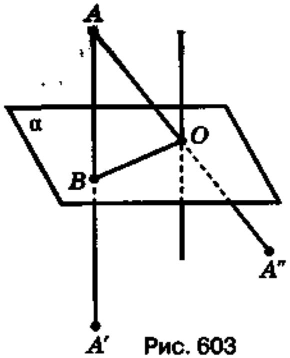


Рис. 603

1321. Докажите, что если точка A симметрична точке A' относительно плоскости α и вместе с этим симметрична точке A'' относительно точки O, лежащей в плоскости α, то точки A' и A'' симметричны друг другу относительно оси, которая проходит через точку O перпендикулярно плоскости α (рис. 603).

1322. Докажите, что если относительно данной плоскости три точки одной плоскости, не лежащие на одной прямой, симметричны трем точкам другой плоскости, то относительно этой плоскости первая и вторая плоскости симметричны друг другу.

1323. Докажите, что прямая, лежащая в плоскости симметрии пересекающихся прямых, составляет с этими прямыми равные углы.

1324. Докажите, что две плоскости, симметричные друг другу относительно третьей плоскости, или пересекаются по прямой, лежащей в третьей плоскости, или параллельны друг другу.

1325. Докажите, что угол между прямыми равен углу между прямыми, им симметричными, относительно:

а) данной точки;
б) данной прямой;
в) данной плоскости.

1326. Есть плоскость α и прямая l, которая:

а) пересекает плоскость α в точке M. Докажите, что прямая l', симметричная прямой l относительно плоскости α, проходит через точку M;
б) параллельна плоскости α. Докажите, что прямая l', симметричная прямой l относительно плоскости α, параллельна этой плоскости.

1327. Докажите, что две прямые, симметричные относительно некоторой плоскости, принадлежат одной плоскости, т. е. являются пересекающимися или параллельными.

1328. Докажите, что две прямые, симметричные относительно данной плоскости, составляют с этой плоскостью равные углы, а симметричные отрезки этих прямых равны друг другу.

1329. Найдите геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно всех точек:

а) данной прямой;
б) данной плоскости, которая не проходит через точку A;
в) лежащих в данной плоскости, которая проходит через точку A;
г) лежащих в данной плоскости на одном расстоянии от точки A.

1330. Найдите геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно всех:

а) плоскостей, проходящих через данную прямую;
б) прямых, параллельных данной прямой.

1331. Найдите геометрическое место осей симметрии двух данных точек.

1332. Найдите центр симметрии и плоскость симметрии двух данных точек.

1333. На данной прямой найдите точку, симметричную данной точке A относительно точки, лежащей в данной плоскости γ.

1334. Найдите плоскость симметрии двух данных плоскостей, учитывая, что эти плоскости:

а) пересекаются; б) параллельны.

1335. Найдите плоскости симметрии двух данных пересекающихся прямых.

1336. Есть две точки. Найдите их ось симметрии, пересекающую данную прямую.

1337. Найдите ось симметрии двух данных скрещивающихся прямых.

1338. Треугольник $A_1B_1C_1$ — образ треугольника ABC при некотором движении. Опишите, как найти образ:

а) медианы AK;
б) точки пересечения медиан;
в) биссектрисы AL;

г) точки пересечения биссектрис;
д) центра описанной окружности;
е) центра вписанной окружности.

1339. Решите уравнение:

а) $2 - \frac{1}{15}\left(2x - \frac{4-3x}{5}\right) = \frac{1}{5}\left(7x - \frac{x-3}{2}\right)$;

б) $1 - \dfrac{x - \frac{x+1}{3}}{3} = \frac{x}{2} - \dfrac{2x - \frac{10-7x}{3}}{2}$;

в) $\frac{5}{x-1} - \frac{4}{x-2} = \frac{1}{x+1}$;

г) $\frac{(x+2)^3}{x^2+x-6} - \frac{(x-2)^2}{x-3} = 12$.

1340. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x + 5y = 7, \\ 3x + 4y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y + z = 10, \\ x + 2y + z = 11, \\ x + y + 2z = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-2y+1} = \frac{7}{3}, \\ \frac{2}{x+y} - \frac{3}{x-2y+1} = -\frac{7}{3}. \end{cases}$

1341. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x + 5y = 7, \\ |3x + 4y| = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x + 5|y| = 7, \\ 3|x| + 4y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |4x + 5y| = 7, \\ |3x + 4y| = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |4x + 5y| = 7, \\ 3|x| + 4|y| = 6. \end{cases}$

1342. Сумма цифр двузначного числа равна 13. Если прибавить к нему 27, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это двузначное число.

1343. Числитель дроби на 3 меньше знаменателя. Если числитель дроби уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на 1, то получится число 0,125. Найдите исходную дробь.

1344. Моторная лодка прошла против течения 16 км и вернулась назад, затратив на обратный путь на 40 мин меньше.

Найдите скорость лодки по озеру, учитывая, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

1345. Есть два сплава массой 6 кг и 12 кг с различным процентным содержанием меди. От них отделили куски одинаковой массы. Сплавив каждый из отделенных кусков с остатком другого куска, получили сплавы с одинаковым процентным содержанием меди. Найдите массу каждого из отделенных кусков.

1346. На координатной плоскости постройте фигуру, определяемую условием:

а) $x + y \geqslant 2$;

б) $2x - 3y \leqslant 5$;

в) $(x + y - 2)(2x - 3y - 5) \leqslant 0$;

г) $\frac{x+y-2}{2x-3y-5} \geqslant 0$.

1347. На координатной плоскости постройте фигуру, определяемую условием:

а) $x^2 + xy - 2y^2 \geqslant 0$;

б) $x^2 - 3xy - 4y^2 \leqslant 0$;

в) $x^2 + y^2 \geqslant 4$;

г) $x^2 + y^2 \leqslant 2x - 4y$.

1348. На координатной плоскости постройте фигуру, определяемую условием:

а) $\begin{cases} \frac{x+y-3}{6-x-y} \leqslant 0, \\ 6(x+y) \leqslant x^2 + y^2 + 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{2-x-y}{x+y-4} \geqslant 0, \\ 4(x+y) \geqslant x^2 + y^2 + 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x+2y-3}{6+2x-y} \geqslant 0, \\ 6(x-y) \leqslant x^2 + y^2 + 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{x-y-2}{2x+y-3} \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 6x + 8y \leqslant 0. \end{cases}$

1349. Решите систему неравенств с параметром:

а) $\begin{cases} x + a - 3 \geqslant 0, \\ 2x - a + 1 \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2a \geqslant 5, \\ 2x - a \leqslant 3. \end{cases}$

1350. Решите неравенство с параметром:

а) $\frac{x+a-3}{2x-a+1} \leqslant 0$;

б) $\frac{x+2a-5}{2x-a-3} \geqslant 0$.

1351. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} (x+y)(x-2y) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4(x-1) + 4a^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

1352. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{-x+y}{x+3y} \leqslant 0, \\ x^2+y^2-2y \leqslant (a-1)(a+1) \end{cases}$$

не имеет решений?

1353. Решите уравнение, сводящееся к квадратному некоторой заменой:

а) $(x^2+x-1)(x^2+x+2)=4$;
б) $x(x+1)(x+2)(x+3)=15$;
в) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$;
г) $18x^2+\frac{2}{x^2}=16-3x-\frac{1}{x}$.

1354. Решите уравнение, сводящееся к квадратному некоторой заменой:

а) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;
б) $(x+3)^2+7(x^2-9)+6(x-3)^2=0$;
в) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{3x}{x^2-8x+15}$;
г) $\dfrac{2x}{3x^2-x+2}=1+\dfrac{7x}{3x^2+5x+2}$.

1355. Решите иррациональное уравнение:

а) $\sqrt{5x-1}=x+1$;
б) $4\sqrt{3-x}+6=5x$;
в) $\sqrt{8x^2-7}=3x-4$;
г) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

1356. Решите иррациональное уравнение:

а) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$;
б) $\sqrt{4+x\sqrt{18-x^2}}=x-2$;
в) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$;
г) $\sqrt{x^4-x^3-x^2-2x+1}=x-1$.

1357. Решите иррациональное уравнение:

а) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x-3}=1$;
б) $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$;
в) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$;
г) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{16-2x}=5$.

1358. Решите иррациональное уравнение:

а) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}$;
б) $2\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x+9}$;

в) $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+10}=\sqrt{x+12}$;
г) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{8-x}$.

1359. Решите иррациональное неравенство:

а) $\sqrt{24-5x} \geqslant x$;
б) $\sqrt{7+3x} < 1-x$;
в) $\sqrt{2x-x^2} > 4-x$;
г) $\sqrt{x^2-x-1} \leqslant 2x+3$.

1360. Решите иррациональное неравенство:

а) $\sqrt{2x-1} \geqslant \sqrt{x+4}$;
б) $\sqrt{3x+5} < \sqrt{x+4}$;
в) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2} \leqslant 7$;
г) $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3} > 1$.

1361. Решите иррациональное неравенство:

а) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1} \geqslant \sqrt{x+3}$;
б) $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1} \leqslant \sqrt{2-x}$;
в) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$;
г) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2} < \sqrt{3x+7}$.

1362. Определите, сколько потребуется краски, чтобы окрасить конический купол высотой 1,5 м с диаметром основания 1,6 м, учитывая, что слой краски имеет толщину 0,1 мм, а боковая поверхность конуса равна произведению полуокружности его основания на образующую.

1363. Ребро куба $CDEFC_1D_1E_1F_1$ равно a. Найдите расстояние от его вершины D до центра A грани FF_1E_1E.

1364. Измерения прямоугольного параллелепипеда $MNOPM_1N_1O_1P_1$ равны a, β, c. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках M и P и центре симметрии B грани $M_1N_1O_1P_1$.

1365. Площадь одной грани куба равна S. Найдите полную поверхность пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершина совпадает с точкой пересечения диагоналей противоположной грани.

1366. Найдите ребро куба, учитывая, что расстояние AK от точки пересечения его диагоналей до вершины A равно 50 мм.

Рис. 604

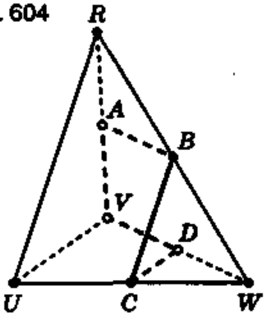
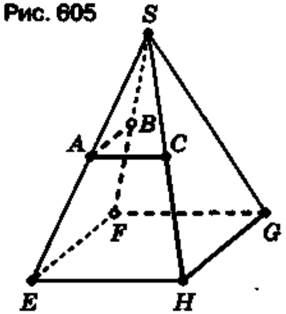


Рис. 605



1367. Есть две прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие данные прямые не в точке A, лежат в одной плоскости.

1368. Радиус окружности, вписанной в грань куба, равен 1 м. Найдите полную поверхность куба.

1369. Полная поверхность треугольной пирамиды, все грани которой — правильные треугольники, равна S. Найдите ребро пирамиды.

1370. AB, BC, CD — соответственно средние линии граней RVW, RUW, UWV правильной треугольной пирамиды $RUVW$, боковые ребра которой в два раза длиннее стороны основания (рис. 604). Найдите длину ломаной $ABCDVA$, учитывая, что суммарная длина всех ребер пирамиды равна 54 см.

1371. AB и AC — соответственно средние линии граней ESF и ESH правильной четырехугольной пирамиды $SEFGH$, боковое ребро которой относится к ребру основания как $5:3$ (рис. 605). Найдите длину ломаной $BACHGFB$, учитывая, что площадь основания равна 36 см^2.

1372. Точка M выбрана на ребре KC треугольной пирамиды $KABC$ так, что $KM : MC = 2 : 3$, точка N — на ребре KB так, что $KN : NB = 3 : 2$, а точка T — на ребре KA так, что $KT = TA$. Учитывая это:

а) докажите, что каждая точка отрезка NM принадлежит плоскости CKB;

б) назовите точку, в которой прямая MN пересекает плоскость ATC;

в) назовите точку, в которой прямая MN пересекает плоскость ATB;

г) постройте точку, в которой прямая MN пересекает плоскость ABC.

1373. Точки A, B, C — соответственно середины ребер SP, SQ, SR треугольной пирамиды $SPQR$, все грани которой — правильные треугольники. Найдите биссектрису грани пирамиды, учитывая, что периметр треугольника ABC равен 30 см.

1374. Есть четыре точки A, B, C, D. Докажите, что если прямые AC и BD лежат в одной плоскости, то и прямые AD и BC лежат в этой же плоскости.

1375. Точки A и B — соответственно середины ребер MM_1 и NK правильной треугольной призмы $MNKM_1N_1K_1$, все ребра которой равны m. Сделайте рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, B и параллельной прямой MK, и найдите его площадь.

1376. Точки K и L — соответственно середины ребер AB и DB правильной треугольной пирамиды, а точка M — точка пересечения медиан грани ACD. Постройте сечение пирамиды плоскостью KLM и найдите его периметр, учитывая, что ребро основания BCD равно k, а боковое ребро в два раза длиннее.

1377. Точка P является серединой ребра MA правильной четырехугольной пирамиды $MACGE$, точка Q — такая точка ребра ME, что $EQ : EM = 1 : 3$, а точка R такая точка луча CG за точкой G, что $CG : GR = 1 : 2$. Постройте сечение пирамиды плоскостью PQR и найдите его периметр, учитывая, что ребро основания пирамиды равно 1 м, а боковое ребро в два раза длиннее.

1378. Определите, какой знак имеет выражение:

а) $\cos 1{,}42 \cdot \operatorname{tg} 10{,}2$;
б) $\sin 2{,}91 \cdot \operatorname{ctg} 5{,}36$;
в) $\operatorname{ctg}(-7{,}84) \cdot \cos(-14{,}7)$;
г) $\operatorname{tg} 10{,}2 \cdot \operatorname{ctg}(-24{,}4)$;
д) $\operatorname{ctg} 1{,}04 \cdot \cos 12{,}34 \cdot \operatorname{tg} 21{,}9$;
е) $\operatorname{tg} 17{,}32 \cdot \cos 22{,}9 \cdot \sin 32{,}7\pi$;
ж) $\cos(-41{,}7) \cdot \cos(-53{,}31) \cdot \operatorname{tg}(-31{,}74)$;
з) $\cos 76{,}4 \cdot \operatorname{tg} 95{,}9\pi \cdot \operatorname{ctg}(-102)$.

1379. Найдите длину дуги, учитывая, что ее:

а) радиус равен 3 м, а угловая мера составляет $\frac{11\pi}{6}$;

б) длина равна 10 м, а угловая мера составляет $\frac{13\pi}{6}$.

1380. Найдите площадь сектора, учитывая, что его радиус равен:

а) 15 см, а радианная мера дуги составляет $\frac{4\pi}{5}$;
б) 20 м, а длина дуги составляет 120 м.

1381. Найдите радиус сектора, учитывая, что:

а) его площадь равна 256 $м^2$, а радианная мера дуги составляет 2,2;
б) радианная мера дуги составляет $\frac{4\pi}{5}$, а площадь равна 600 $м^2$.

1382. Найдите радианную меру:

а) дуги сектора, учитывая, что его радиус равен 50 см, а площадь составляет 3925 $м^2$;
б) дуги сектора, учитывая, что его площадь составляет 3500 см, а радиус равен 47 м;
в) угла правильного 42-угольника.

1383. Найдите значение выражения:

а) $4\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)+2\,\mathrm{tg}\,\frac{15\pi}{6}-\mathrm{ctg}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$;

б) $5\sin\frac{14\pi}{3}+4\,\mathrm{ctg}\left(-\frac{23\pi}{4}\right)+\sin\frac{37\pi}{4}-3\,\mathrm{tg}\,\frac{19\pi}{6}$;

в) $\left(5\sin\frac{29\pi}{6}-3\mathrm{ctg}\frac{31\pi}{3}\right):\cos\frac{32\pi}{3}\cdot\cos\frac{23\pi}{6}$;

г) $\mathrm{tg}\,\frac{45\pi}{4}\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{20\pi}{3}-\cos\left(-\frac{51\pi}{4}\right):\mathrm{tg}\,\frac{59\pi}{3}$;

д) $\left(\mathrm{ctg}\frac{53\pi}{6}+2\sin\frac{37\pi}{3}\right)^3\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{44\pi}{3}\cdot\mathrm{tg}\left(-\frac{28\pi}{6}\right)$;

е) $\cos 23\pi:\mathrm{tg}\,\frac{41\pi}{6}+\mathrm{tg}\,33\pi:\sin\left(-\frac{77\pi}{4}\right)$.

1384. Есть выражения $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}\,x$. Найдите значения тех из них, которые не даны, если:

а) $\sin x=\frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2}<x<\pi$;

б) $\cos x=\frac{4}{5}$ и $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$;

в) $\mathrm{tg}\,x=\frac{24}{7}$ и $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$;

г) $\mathrm{tg}\,x=-\frac{13}{84}$ и $\frac{\pi}{2}\pi<x<\pi$;

д) $\mathrm{ctg}\,x=-\frac{80}{39}$ и $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$;

е) $\sin x=\frac{65}{97}$ и $0<x<\frac{\pi}{2}$.

1385. Найдите сумму корней уравнения $\cos 4k+\cos 2k+1=0$, принадлежащих промежутку $[0;\,10\pi]$.

1386. Найдите сумму корней уравнения из промежутка $[-\pi;\,5\pi]$, учитывая, что это уравнение следующее:

а) $\left(\sin f-\frac{1}{2}\right)(\sin f+1)=0$;

б) $\left(\cos g+\frac{1}{2}\right)(\cos g-1)=0$;

в) $\left(\cos h-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin h+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$;

г) $(1+\cos e)\left(\frac{1}{\sin e}-1\right)=0$.

1387. Найдите среднее арифметическое корней уравнения из промежутка $[-\pi;\,\pi]$, учитывая, что это уравнение следующее:

а) $\sin^2 f+\sin f\cos f-2\cos^2 f=0$;
б) $4\cos^2 2k+8\cos^2 k=7$;
в) $\sin 2m+\cos 2m=\sin m+\cos m$;
г) $\sqrt{2}\cos 2q=\cos q+\sin q$.

1388. Решите неравенство:

а) $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $2\cos x+1<0$;

в) $\mathrm{tg}\,x<\sqrt{3}$;

г) $\mathrm{ctg}\,x>-\sqrt{3}$;

д) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}>-\frac{1}{4}$;

е) $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1389. Запишите корень степенью с рациональным показателем и упростите выражение:

а) $a\sqrt{a}$;

б) $x\sqrt[7]{x^2y^3}$;

в) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

г) $-\frac{4}{\sqrt[4]{x^3y}}$;

д) $3\sqrt{(a-2b)^{-1}}$;

е) $\left(x^{\frac{4}{9}}\right)^{-3}\cdot\sqrt[3]{x^{-2}}$.

1390. Определите, чему равна производная функции:

а) $-2x$; в) $\frac{2}{x}$; д) $\frac{1}{x^2}$;

б) $-3x^2$; г) $\frac{a}{x}$; е) $2x^{\frac{1}{2}}$.

1391. Определите, производная какой функции равна:

а) -3; б) $-6x$; в) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; г) $x^{-\frac{1}{2}}$.

1392. Исследуйте функцию f и постройте ее график, учитывая, что:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;

б) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$;

в) $f(x) = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 12x}$.

1393. Когда собрали урожай с двух участков, то оказалось, что со второго участка, площадь которого равна 39 га, зерна собрали на 13 ц больше. Определите урожаи, собранные с одного и другого участков, зная, что урожайность на первом участке оказалась равной 31 ц/га, а средняя урожайность — 25 ц/га.

* * *

1394. Найдите все тройки неотрицательных чисел, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} x^3\sqrt{1-y} = \sqrt{1-z}, \\ y^3\sqrt{1-x} = z^3. \end{cases}$$

1395. В параллелограмме $ABCD$ отмечена такая точка Q, что $\angle QAD = \angle QCD$. Докажите, что $\angle QBC = \angle QDC$.

1396. Можно ли числа от 1 до 25 поставить по кругу так, чтобы сумма любых пяти чисел, идущих друг за другом, при делении на 5 давала в остатке 1 или 4?

29.* Поворот и параллельный перенос пространства

Вспомним, что в результате поворота плоскости вокруг точки O на угол α каждая ее точка поворачивается на угол α вокруг точки O (рис. 606).

Рис. 606

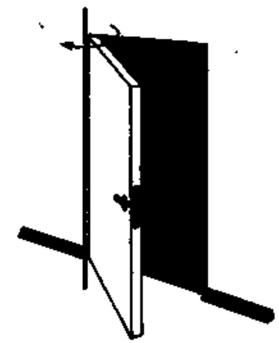


Рис. 607

Рассмотрим поворот пространства. Когда вы открываете дверь, она делает поворот в пространстве (рис. 607). Поворот в пространстве происходит вокруг определенной оси, а каждая точка пространства описывает дугу окружности с центром на оси вращения в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Ось вращения дверей проходит через точки навеса.

Поворотом пространства вокруг прямой *a* на угол α в заданном направлении называется такое преобразование пространства, при котором в каждой плоскости, перпендикулярной прямой a, происходит поворот вокруг точки ее пересечения с прямой a на угол α в заданном направлении. Прямая a называется **осью поворота**, а угол α — **углом поворота**.

Теорема 5. ***Поворот пространства вокруг прямой является движением.***

Доказательство. Пусть точки A' и B' получены из точек A и B поворотом пространства вокруг оси l (рис. 608). Докажем, что $A'B' = AB$.

В соответствии с определением поворота вокруг прямой точки A и A' лежат в некоторой плоскости α, перпендикулярной оси поворота l, а точки B и B' — в некоторой плоскости β, перпендикулярной оси поворота l. Значит, плоскости α и β параллельны друг другу. Пусть они пересекают ось l в точках C и D соответственно, а прямые, проведенные через точки A и A' параллельно оси l, — плоскость β в некоторых точках E и F соответственно. Тогда $AE \parallel CD \parallel A'F$. Поскольку плоскости α и β параллельны, то $AE = CD = A'F$. Это

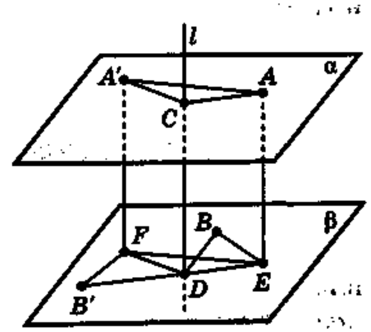


Рис. 608

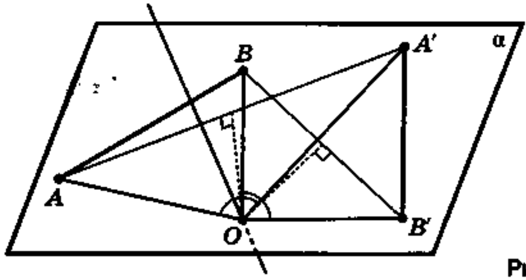


Рис. 609

позволяет утверждать, что четырехугольники $AEDC$, $DCA'F$, $A'FEA$ — параллелограммы. Поэтому $AC = ED$, $A'C = FD$, $AA' = EF$, и, значит, треугольники ACA' и EDF равны. Отсюда следует, что $\angle ACA' = \angle EDF$. Учитывая, что $\angle ACA' = \angle BDB'$, заключаем, что $\angle EDF = \angle BDB'$, а поэтому $\angle BDE = \angle B'DF$. Значит, треугольники BDE и $B'DF$ равны, и поэтому $BE = B'F$. Теперь можно утверждать равенство прямоугольных треугольников AEB и $A'FB'$ по равенству их соответствующих катетов, а значит, и равенство их гипотенуз $A'B' = AB$.

Теорема 6. ***Два равных непараллельных отрезка можно совместить некоторым поворотом вокруг оси.***

Доказательство. Пусть есть два равных непараллельных отрезка AB и $A'B'$.

Пусть прямые AB и $A'B'$ пересекаются (рис. 609). Тогда отрезки AB и $A'B'$ лежат в одной плоскости, пусть это плоскость α. Найдем точку O пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA' и BB'. Треугольники AOB и $A'OB'$ равны, так как их стороны OA и OA', а также OB и OB' равны по свойству точек серединного перпендикуляра, а стороны AB и $A'B'$ равны по условию. Поэтому равны и соответствующие углы AOB и $A'OB'$ этих треугольников, а значит, равны и углы AOA' и BOB'. Таким образом, отрезок $A'B'$ получается из отрезка AB поворотом на угол AOA' вокруг точки O. Но этот поворот есть также поворот вокруг оси l, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости α.

Пусть прямые AB и $A'B'$ скрещиваются. Тогда прямые AA' и BB' также скрещиваются. Проведем через прямую AA' плоскость α, параллельную прямой BB', а через прямую BB' — плоскость β, параллельную прямой AA' (рис. 610). В плоскости α построим серединный перпендикуляр k к отрезку AA', а в плоскости β — серединный перпендикуляр l к отрезку BB', и затем найдем общий перпендикуляр CD прямых k и l. Понятно, что прямая CD перпендикулярна плоскостям α и β.

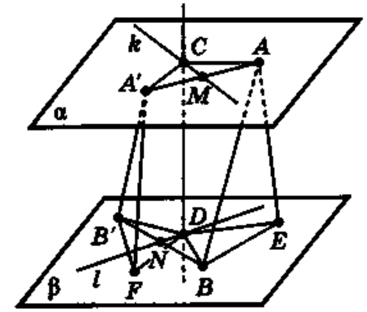


Рис. 610

По свойству точек серединного перпендикуляра отрезки CA и CA', а также отрезки DB и DB' равны друг другу, поэтому при повороте вокруг оси CD на угол ACA' точка A отображается на точку A', а при повороте вокруг этой оси на угол BDB' — точка B отображается в точку B'.

Остается доказать, что углы ACA' и BDB' равны. Основания E и F перпендикуляров AE и $A'F$ на плоскость β вместе с точкой D определяют угол EDF, равный углу ACA'. Равенство по катету и гипотенузе прямоугольных треугольников AEB и $A'FB'$ определяет равенство их катетов BE и $B'F$. Это равенство вместе с равенствами отрезков DB и BD', а также DE и DF позволяет утверждать равенство треугольников BDE и $B'DF$, а значит, и углов. Прибавив к ним по углу BDF, получим равенство углов BDB' и EDF. Наконец, учитывая, что угол EDF равен углу ACA', получим нужное равенство углов ACA' и BDB'.

Параллельным переносом пространства называется преобразование пространства, при котором все точки пространства смещаются в заданном направлении на заданное расстояние, т. е. при параллельном переносе точки X' и Y' пространства есть образы точек X и Y тогда и только тогда, когда $\overline{XX'} = \overline{YY'}$.

Теорема 7. ***Параллельный перенос пространства является движением.***

Доказательство. Пусть точки A' и B' получены из точек A и B параллельным переносом на направленный отрезок $\overrightarrow{MN}$ (рис. 611). Докажем, что $A'B' = AB$.

Отрезки $AA' = BB'$ параллельны, поэтому через них можно провести некоторую плоскость α. Учитывая, что эти отрезки и равны друг другу, можем утверждать, что четырехугольник $AA'B'B$ — параллелограмм. А поэтому отрезки $A'B'$ и AB равны друг другу.

Теорема 8. ***При параллельном переносе плоскость преобразуется в параллельную ей плоскость.***

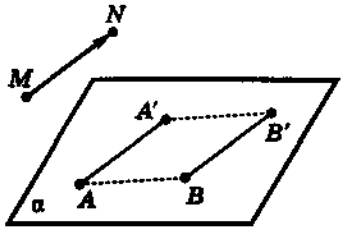


Рис. 611

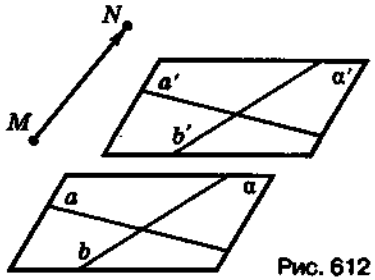


Рис. 612

Доказательство. Пусть есть параллельный перенос на направленный отрезок $\overrightarrow{MN}$ и плоскость α (рис. 612). В этой плоскости выберем произвольно пересекающиеся прямые a и b. При данном параллельном переносе прямые a и b отображаются на пересекающиеся прямые a' и b', которые соответственно параллельны прямым a и b, а плоскость α — в плоскость α', которая определяется прямыми a' и b'. По признаку параллельности плоскостей плоскость α' параллельна плоскости α.

?
1. Какое преобразование пространства называется поворотом пространства вокруг прямой?
2. Чем определяется поворот пространства?
3. Что означает утверждение «поворот пространства вокруг прямой является движением»?
4. Как найти поворот, совмещающий два данных равных непараллельных отрезка?
5. Какой отрезок считается направленным и как он обозначается?
6. Какое преобразование пространства называется параллельным переносом?
7. Что означает утверждение «параллельный перенос пространства является движением»?
8. Какая фигура является образом плоскости при параллельном переносе пространства?

1397. Есть треугольная пирамиды $PABC$, основанием которой является правильный треугольник, а боковые ребра равны друг другу. Через ортоцентр Q основания пирамиды и ее вершину P проведена прямая, вокруг которой выполнен поворот на 120°. Найдите образ:

а) середины K ребра AC;
б) середины L ребра PA;
в) такой точки M, что точка B — середина отрезка AM;
г) отрезка CL;
д) прямой KL;
е) треугольника KLM.

1398. Начертите образы фигур, указанных в упражнении 1397, учитывая, что поворот выполнен на угол 60°.

1399. Задан поворот на угол 90° вокруг прямой a, перпендикулярной данной плоскости α. Начертите образ:

а) точки A, лежащей в плоскости α;
б) точки B, не лежащей в плоскости α;
в) прямой k, лежащей в плоскости α;
г) прямой l, параллельной плоскости α;
д) прямой m, перпендикулярной плоскости α;
е) плоскости β, перпендикулярной плоскости α;
ж) отрезка CD, пересекающего ось поворота;
з) отрезка EF, пересекающего плоскость α.

1400. Найдите для данного поворота неподвижные:

а) точки; б) прямые; в) плоскости.

1401. Есть две точки. Определите:

а) при каком повороте одна из них отображается на другую;
б) при каком повороте каждая из них отображается на другую;
в) какую фигуру образуют оси всех поворотов, указанных в предыдущих случаях.

1402. В кубе окрашены две грани. В результате некоторого поворота он перешел в себя. Определите, может ли при таким повороте:

а) одна из окрашенных граней оказаться на месте другой;
б) каждая из окрашенных граней оказаться на месте другой.

1403. Основанием пирамиды $PABC$ является равнобедренный треугольник с боковыми сторонами BA и BC, равными 1, и всеми боковыми ребрами, равными 2. Определите, есть ли такой поворот, при котором пирамида перейдет в себя, а грань PAB — в грань PCB.

1404. Из точки A к плоскости α проведен перпендикуляр AB длиной 1 и наклонная AC длиной 2. Отрезок CX, длиной 1, перпендикулярный AC, поворачивается вокруг прямой AC. Определите граничные значения расстояния от точки X до плоскости α.

1405. В треугольной пирамиде $PABC$, все ребра которой равны 2, рассматривается сечение плоскостью, которая поворачивается вокруг прямой BK, где точка K — середина ребра AC. Определите граничные значения площади сечения.

1406. Треугольную пирамиду, основанием которой является правильный треугольник, а все боковые ребра равны друг другу, повернули на $60°$ вокруг прямой, соединяющей вершину пирамиды с точкой пересечения биссектрис ее основания. Начертите образ пирамиды при этом повороте, а также пересечение и объединение исходной и полученной пирамид.

1407. Есть две равные пирамиды, основания которых — правильные треугольники, а все боковые ребра равны друг другу. Определите, можно ли эти пирамиды совместить поворотом, учитывая, что они имеют:

а) общую высоту, их основания лежат в одной плоскости, и сами они лежат в одном полупространстве;
б) общее ребро;
в) общую грань.

1408. Точки K и L — середины ребер треугольной пирамиды $PABC$, основанием которой является правильный треугольник ABC, а все боковые ребра равны друг другу. Докажите, что при повороте вокруг прямой KL на угол $180°$ эта пирамида переходит в себя.

1409. На плоское зеркало под углом $45°$ падает луч света. Зеркало поворачивается на угол $45°$ вокруг проекции луча на зеркало. Определите, на какой угол отклонится луч света.

1410. Начертите фигуру вращения, полученную вращением отрезка вокруг оси, которая:

а) перпендикулярна ему и проходит через один из концов;
б) не перпендикулярна ему и проходит через один из концов;
в) пересекает его во внутренней точке;
г) параллельна ему.

1411. Начертите и опишите тело вращения, полученное вращением равностороннего треугольника вокруг его:

а) высоты; б) стороны.

1412. Начертите и опишите тело вращения, полученное вращением равностороннего треугольника вокруг прямой, которая параллельна высоте и проходит:

а) через его вершину;
б) вне треугольника;
в) внутри треугольника.

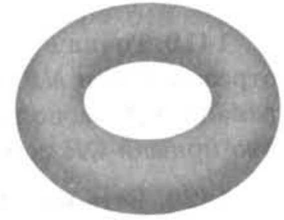


Рис. 613

1413. Начертите и опишите тело вращения, полученное вращением прямоугольника вокруг:

а) серединного перпендикуляра к стороне;
б) диагонали.

1414. Начертите и опишите тело вращения, полученное вращением сектора круга с центром O и хордой AB вокруг:

а) крайнего радиуса;
б) среднего радиуса;
в) диаметра, параллельного прямой AB;
г) диаметра, не параллельного прямой AB.

1415. Начертите и опишите тело вращения, полученное вращением сегмента круга с хордой AB вокруг:

а) прямой AB;
б) диаметра, перпендикулярного прямой AB;
в) диаметра, параллельного прямой AB.

1416. Тор есть тело в форме автомобильной камеры (рис. 613). Можно ли его считать телом вращения?

1417. Всегда ли при вращении выпуклой плоской фигуры получается выпуклое тело?

1418. Точка Q — центр основания четырехугольной пирамиды $PABCD$, основанием которой является правильный четырехугольник $ABCD$, а все боковые ребра равны друг другу. Начертите ее образ в результате поворота на $45°$ вокруг оси PQ и последующего параллельного переноса на направленный отрезок, параллельный оси вращения и равный направленному отрезку QP.

1419. Точка P — середина ребра ML куба $MNKLM_1N_1K_1L_1$, отрезки MK и NP пересекаются в точке Q, а точка R на диагонали N_1L расположена так, что $N_1R : N_1L = 1 : 3$. Докажите, что прямая QR параллельна плоскости грани MM_1N_1N.

1420. Есть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BC_1D.

1421. Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат со стороной 6, боковое ребро AA_1 также равно 6 и образует углы по 60° с ребрами AB и AD. Найдите диагонали параллелепипеда.

1422. В правильной треугольной призме боковое ребро вдвое больше ребра основания. Найдите угол между диагональю боковой грани и ребром основания, с которым эта диагональ не имеет общих точек.

1423. В правильной четырехугольной призме угол между диагоналями боковых граней равен φ. Найдите отношение бокового ребра к ребру основания, учитывая, что эти диагонали проведены:

а) в противоположных гранях;
б) в смежных гранях.

1424. В правильной треугольной призме угол между диагоналями боковых граней равен φ. Найдите отношение бокового ребра к ребру основания, учитывая, что:

а) эти диагонали проведены из одной вершины;
б) эти диагонали не имеют общих точек.

1425. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен α, диагональ параллелепипеда равна l и образует угол β с плоскостью основания. Найдите объем параллелепипеда.

1426. Диагонали AC и BD основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны l и образуют угол α. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что боковое ребро образует с плоскостью AA_1C угол β.

1427. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна l и образует угол α с плоскостью другой боковой грани. Найдите боковое ребро и ребро основания призмы.

1428. Расстояние между двумя непересекающимися диагоналями смежных граней куба равно d. Найдите объем куба.

1429. Все ребра треугольной призмы между собой равны. Плоские углы при одной из вершин также равны друг другу. Найдите высоту призмы, учитывая, что полная ее поверхность равна S.

1430. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной a и острым углом α. Найдите боковое ребро и ребро основания призмы, учитывая, что диагональ боковой грани призмы образует с боковым ребром угол β.

1431. Боковое ребро AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a и образует с ребрами AB и AD углы, равные α. Найдите высоту параллелепипеда, учитывая, что угол BAD равен β.

1432. Имеется треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой $\angle ABC = 90°$, $\angle ABB_1 = \alpha$, $\angle CBB_1 = \beta$, $AB = BC = a$, $BB_1 = b$. Найдите высоту этой призмы.

1433. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна d и образует углы α и β со смежными боковыми гранями.

1434. Найдите двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды, учитывая, что:

а) угол между ее боковыми ребрами равен α;
б) двугранный угол при боковом ребре равен β.

1435. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ проведены медиана AM основания ABC и биссектриса BL боковой грани SAB. Найдите отрезок LM, учитывая, что $AB = 1$ и $SA = 2$.

1436. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. Точка, делящая высоту пирамиды в отношении $1 : 2$, если считать от вершины, находится на расстоянии $\frac{4}{\sqrt{13}}$ от бокового ребра. Найдите боковое ребро и ребро основания пирамиды.

1437. Найдите боковые ребра пирамиды, учитывая, что они образуют с плоскостью основания углы в 60°, а ребра основания равны 7, 8 и 9.

1438. Точка находится на одинаковых расстояниях от вершин правильной пирамиды. Найдите это расстояние, учитывая, что боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{21}$, а ребро основания — 6.

1439. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через основание H высоты SH проведена плоскость, параллельная ребрам SA и BC. Найдите площадь полученного сечения, учитывая, что боковое ребро образует с плоскостью основания угол α, а ребро основания равно l.

1440. На расстоянии d от ребра SA правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведено сечение плоскостью, параллельной ребрам SA и BC. Найдите его площадь, учитывая, что $AB = a$ и $SA = a\sqrt{2}$.

1441. На ребрах MN и KL пирамиды $MNKL$, все ребра которой равны друг другу, выбраны соответственно такие точки A и B, что $MA : MN = LB : LK = 1 : 3$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через точки A, B и параллельна прямой MK, учитывая, что ребро пирамиды равно m.

1442. На скрещивающихся прямых m и n выбраны соответственно точки M, N и U, V. Докажите, что прямые MU и NV скрещиваются.

1443. Сумма всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 428 см. Найдите измерения параллелепипеда, учитывая, что $\frac{AB}{BC} = \frac{6}{7}$ и $\frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$.

1444. Докажите, что два угла с соответственно параллельными сторонами или равны, или их сума равна 180°.

1445. Докажите, что:

а) диагональ параллелепипеда меньше суммы трех ребер, имеющих общую вершину;

б) сумма квадратов четырех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов двенадцати его ребер.

1446. Есть куб $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Докажите, что диагональ CE_1 куба перпендикулярна:

а) диагонали BD его грани $BCDE$;
б) диагонали B_1C его грани BB_1C_1C;
в) плоскости BDC_1.

1447. Есть прямая призма, основанием которой является правильный треугольник. Проведите плоскость через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь полученного сечения, учитывая, что сторона основания призмы равна a, а высота — h.

1448. Сумма площадей трех граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равна 404 дм^2, а его ребра пропорциональны числам 3, 7 и 8. Найдите диагональ параллелепипеда.

1449. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 1. Найдите ее высоту.

1450. Через вершину C прямого угла прямоугольного треугольника ABC, катеты AC и BC которого равны 6 см и 8 см, проведена прямая l, перпендикулярная плоскости ABC. Найдите расстояние от точки K прямой l, отстоящей от вершины C на 12 см, до середины M гипотенузы AB.

1451. Есть треугольник ABC, в котором проведена высота BV и из вершины B — отрезок BU, перпендикулярный прямым BA и BC. Найдите угол между прямой UV и средней линией, соединяющей стороны BA и BC.

1452. Точка Q — середина ребра KK_1 прямоугольного параллелепипеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$, а точка H взята на ребре MM_1 так, что $MH : MM_1 = 1 : 3$. Найдите отрезок HQ, учитывая, что диагональ параллелепипеда равна 91 см, а диагональ основания — 35 см.

1453. Есть треугольная пирамида $KLMN$, все ребра которой равны друг другу. Постройте ее сечение плоскостью, перпендикулярной ребру MN и проходящей через его середину. Найдите площадь этого сечения, учитывая, что $MN = 36$ см.

1454. Из вершины K прямоугольного треугольника KMN с прямым углом K и катетами, равными 21 см и 28 см, возведен перпендикуляр KC длиной 42 см к плоскости треугольника, а на гипотенузе отмечена ее середина D. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CKD.

1455. Ребро CY треугольной пирамиды $CXYZ$ перпендикулярно плоскости XYZ. Найдите его длину, учитывая, что $XY = 9$ см, $YZ = 16$ см и $CZ : CX = 4 : 3$.

1456. На диагонали квадратного основания прямоугольного параллелепипеда выбрана точка, разделяющая ее в отношении $1 : 3$, и через нее проведена плоскость, перпендикулярная этой диагонали. Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью, учитывая, что сторона основания равна 12 см, а диагональ параллелепипеда — $12\sqrt{6}$ см.

1457. Есть правильная треугольная пирамида $DFGH$. В ней проведены два сечения: одно через вершины F и G перпендикулярно прямой DH, а другое — параллельно DH через вершину G и точку B, делящую ребро FH на отрезки FB и BH, соответственно равные 16 см и 14 см. Найдите отрезок, по которому пересекаются сечения, учитывая, что $DF = 24$ см.

1458. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. Параллельно прямой c в плоскости α проведена прямая a, а в плоскости β — прямая b. Найдите расстояние между прямыми a и b, учитывая, что расстояние между прямыми a и c равно 3 м, а между прямыми b и c — 1,6 м.

1459. Ромб $ABCD$ с острым углом в 60° и высотой h, сторона AB которого принадлежит плоскости, проектируется на эту плоскость в четырехугольник, один из углов которого равен 135°. Найдите площадь проекции ромба.

1460. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ возведен такой перпендикуляр AK к плоскости ABC, что расстояния KB, KC, KD соответственно равны 18 см, 21 см, 27 см. Найдите длину отрезка AK.

1461. AO — перпендикуляр длиной 1 из точки A к плоскости, а AB, AC и AD — такие наклонные длиной 2 к этой же плоскости, что $\angle BAD = \angle DAC = \angle CAB$. Найдите углы между наклонными.

1462. Из точки X к плоскости δ проведен перпендикуляр XQ, равный 5 см, и две равные наклонные XY и XZ, которые образуют с перпендикуляром углы YXQ и ZXQ по 60°, а между собой угол ZXY, равный 90°. Найдите расстояние YZ между основаниями наклонных.

1463. Отрезок MN длиной 24 см пересекает плоскость в точке O, а его концы отстоят от плоскости на 2 см и 6 см. Найдите отрезки OM и ON.

1464. Из вершины A прямоугольного треугольника с прямым углом B и катетом BC, равным a, возведен такой перпендикуляр AD, что расстояние между точками C и D равно l. Найдите расстояние от точки D до прямой BC.

1465. Есть равносторонний треугольник со стороной 6 м. Найдите расстояние до его плоскости от точки, отстоящей на 4 м от каждой из вершин.

1466. Из концов отрезка AB, параллельного плоскости, проведены перпендикуляр AC и наклонная BD, перпендикулярная отрезку AB. Найдите расстояние между основаниями C и D перпендикуляра и наклонной, учитывая, что $AB = k$, $AC = l$, $BD = m$.

1467. Точка M лежит на прямой, проходящей через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC и перпендикулярной его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, учитывая, что $AC = 40$ см, а $CM = 20\sqrt{7}$ см.

1468. Из центра симметрии O ромба $ABCD$ к его плоскости возведен перпендикуляр OA. Докажите, что расстояния от точки A до прямых, которым принадлежат стороны ромба, равны друг другу, и найдите их, учитывая, что $AO = a\sqrt{2}$, $AC = 2a$, $BD = a$.

1469. Из вершины большего угла треугольника со сторонами 10 см, 17 см и 21 см к его плоскости возведен перпендикуляр, равный 15 см. Найдите расстояние от концов перпендикуляра до большей стороны.

1470. В основании четырехугольной пирамиды $QTXYZ$ лежит квадрат $TXYZ$ со стороной l, боковое ребро QT перпендикулярно плоскости основания. Найдите косинус угла между плоскостью основания и наибольшим боковым ребром, учитывая, что оно с плоскостью QTX образует угол β.

1471. Есть равнобедренный треугольник ABC с основанием AB, боковая сторона AC и угол A которого соответственно равны 10 см и 30°. Из вершины C к плоскости треугольника возведен перпендикуляр CQ длиной $10\sqrt{2}$ см. Найдите угол между прямой QA и плоскостью QBC.

1472. Найдите угол между скрещивающимися прямыми AB и PQ, учитывая, что точки P и Q равноудалены от концов отрезка AB.

1473. Есть треугольник ABC, у которого $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. Точка M отстоит от прямых AB, BC и AC на $8\frac{2}{3}$ см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, учитывая, что ее проекция на эту плоскость лежит внутри треугольника.

1474. Расстояния от вершин треугольника ABC до плоскости α различны и равны d_1, d_2, d_3. Найдите расстояние от точки пересечения медиан этого треугольника до плоскости α.

1475. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN. Прямая KL плоскости α проведена параллельно прямой MN на расстоянии 60 см от нее. Точка B плоскости β взята на расстоянии 91 см от прямой MN. Найдите расстояние от точки B до прямой KL.

1476. На ребре PB треугольной пирамиды $PABC$, все ребра которой равны 1, произвольно выбирается точка K. Пусть $BK = x$. Выразите функцией переменной x расстояние от точки K до:

а) прямой AC; б) плоскости APC.

Найдите граничные значения этих расстояний.

1477. Прямоугольный треугольник ACE с гипотенузой AC опирается катетом AE на плоскость α и образует с ней двугранный угол в 45°. Найдите расстояние от вершины C до плоскости α, учитывая, что катет AE равен 12 м, а гипотенуза AC относится к катету CE как $3 : 1$.

1478. Используя формулы понижения степени, вычислите синус, косинус и тангенс:

а) $22°30'$; в) $7°30'$; д) $\frac{5\pi}{12}$;

б) $15°$; г) $\frac{\pi}{16}$; е) $\frac{5\pi}{8}$.

1479. Докажите тождество:

а) $4\sin^4 a + \sin^2 2a = 4\sin^2 a$;

б) $2\cos^2\beta - \cos 2b = 1$;

в) $\cos 2x + 2\sin^2 x = 1$;

г) $\frac{1 - \cos 2y + \sin 2y}{1 + \cos 2y + \sin 2y} = \operatorname{tg} y$;

д) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$;

е) $\frac{1 - \cos\beta + \cos 2\beta}{\sin 2\beta - \sin\beta} = \operatorname{ctg}\beta$.

1480. Вычислите:

а) $2\cos^2 15° - 1$; в) $1 - 2\sin^2 22{,}5°$; д) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$;

б) $2\sin^2\frac{\pi}{8} - 1$; г) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$; е) $\frac{6\operatorname{tg} 15°}{1 - \operatorname{tg}^2 15°}$.

1481. Докажите тождество:

а) $8\cos 10°\cdot\cos 50°\cdot\cos 70° = \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg} 20°\cdot\operatorname{tg} 40°\cdot\operatorname{tg} 60°\cdot\operatorname{tg} 80° = 3$;

в) $4\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2} = \sin(a+b) + \sin a + \sin b$;

г) $4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{4}\right)$.

1482. Найдите количество корней уравнения из промежутка $[-\pi; 3\pi]$, учитывая, что это уравнение следующее:

а) $(1 + \cos z)\operatorname{tg}\frac{z}{2} = 0$; в) $\sin 4x\cos x\operatorname{tg} 2x = 0$;

б) $\frac{\cos^2 b + \cos b}{\sin b} = 0$; г) $\cos y\operatorname{tg} 3y = 0$.

1483. Найдите количество корней уравнения из промежутка $[-\pi; 2\pi]$, учитывая, что это уравнение следующее:

а) $\frac{2\sin^2 k - 3\sin k + 1}{\cos^2 k - \cos k} = 0$; в) $\frac{\sin d + \cos d}{\cos 2d} = 0$;

б) $\frac{\cos t}{1 + \cos 2t} = 0$; г) $\sin 3c = \cos 2c$.

1484. Найдите сумму корней уравнения из промежутка $[-\pi; \pi]$, учитывая, что это уравнение следующее:

а) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$;

б) $3\sin 2x + 8\cos^2 x = 1$;

в) $\sin^2 y + \sin^2 2y + \sin^2 3y + \sin^2 4y = 2$;

г) $3\sin x + 4\cos x = 5$.

1485. Найдите среднее арифметическое корней уравнения из промежутка $[-2\pi;\ 2\pi]$, учитывая, что это уравнение следующее:

а) $2\sin^2 z + \sin^2 2z = 1{,}25 - 2\cos 2z$;
б) $1 + \sin 2x = \cos x - \sin x$;
в) $3(\cos t - \sin t) = 1 + \cos 2t - \sin 2t$;
г) $\sqrt{\cos x} = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$.

1486. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2}\sin x + 1 > 0$; в) $\cos^2 2x + \cos^2 x \leqslant 1$;
б) $2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}$; г) $\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}$.

1487. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\sin x > 0,\\ \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\cos x > -\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg} x \leqslant -1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\operatorname{tg} x > 0{,}23,\\ \operatorname{ctg} x \leqslant 0{,}3.\end{cases}$

1488. Найдите производную функции:

а) $y = t - \frac{2}{t}$; в) $y = \frac{2t^3}{3} - 3t^2 + 6t - 1$; д) $y = 4 - t^4$;
б) $y = \frac{t+3}{t}$; г) $y = 2 - t^2$; е) $y = \frac{3}{t^2}$.

1489. Найдите производную функции:

а) $y = \frac{d^2 - 3d + 1}{d^2 + d + 1}$; г) $y = \frac{d + \sqrt{d}}{d - \sqrt{d}}$;
б) $y = \frac{d^2}{d - \frac{1}{d}}$; д) $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{d}}$;
в) $y = \frac{d}{\sqrt{d} + 1} + \frac{d}{\sqrt{d} - 1}$; е) $\sqrt[3]{d}\left(\sqrt{d} - 1\right)$.

1490. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 2}$ в точке с абсциссой:

а) 0; б) –2; в) 1.

1491. Разложите на множители многочлен $f(x)$ и, используя полученное разложение, решите методом интервалов неравенства $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, учитывая, что:

а) $f(x) = x^2 - x - 12$; в) $f(x) = 3x^3 - 6x^2$;
б) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$; г) $f(x) = 2x^3 - 8x$.

1492. Найдите точки остановки тела, двигающегося по закону:

а) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$; в) $y = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2}$;
б) $y = 2x - 1 + \frac{1}{4x+1}$; г) $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

1493. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $-x^4$; б) $-x^2 + 4x + 1$; в) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

1494. Учитывая, что тело отдаляется от Земли по закону $s = A(t + c)^{\frac{2}{3}}$:

а) найдите закон, по которому меняется его скорость;
б) найдите ускорение тела;
в) докажите, что сила, действующая на тело, изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния s.

1495. Докажите, что движение по кубическому закону $s = at^3 + bt^2 + ct + d$ происходит с ускорением, которое изменяется линейно.

1496. Определите, в какие моменты времени будет иметь максимальную кинетическую энергию тело, двигающееся прямолинейно по закону $s = 5\sin 2\pi t + 1$.

1497. *Параболическим сегментом* называется фигура, ограниченная параболой и прямой, перпендикулярной оси параболы, перпендикуляр из вершины параболы на эту прямую — *высотой сегмента*, а отрезок прямой, высекаемый параболой, — *основанием сегмента* (рис. 614). Найдите прямоугольник наибольшей площади, вписанный в параболический сегмент с основанием a и высотой H (рис. 615).

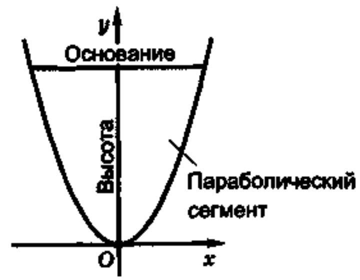


Рис. 614

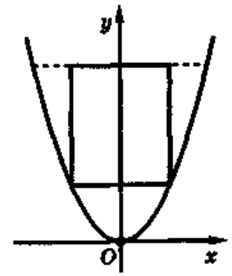


Рис. 615

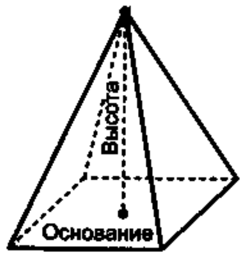


Рис. 616

1498. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой 2 см, а высота пирамиды равна 6 см. Найдите наибольший объем пирамиды, учитывая, что ее объем V определяется по формуле $V = \frac{1}{3} S_{осн} h$, где $S_{осн}$ — площадь основания пирамиды, h — ее высота (рис. 616).

1499. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 - 2t^3 - 2t^2$. Найдите скорость и ускорение точки в момент времени t, равный:

а) 1; б) –1; в) –3; г) 10.

1500. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = -a^3 + 3a - 2$;
б) $y = 3t^5 - 5t^3$;
в) $z = 3u^2 - u^3$;
г) $z = 9r^5 + 3r^3$;
д) $f = \frac{2d}{1 + d^2}$;
е) $f = y^2 \sqrt{1 + y}$.

1501. Докажите, что на множестве R действительных чисел функция:

а) $3x + x^3 + x^7 - 2$ возрастает;
б) $x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ возрастает;
в) $-\frac{x^3}{3} - 2x$ убывает;
г) $12 - 9x + 3x^2 - x^3$ убывает.

1502. Некоторая прямая пересекает параболу $y = x^2 - 4x$ в точках A (0, 0) и B (5, 5). Запишите:

а) уравнение этой секущей;
б) уравнение касательной к параболе, параллельной этой секущей.

1503. Найдите точки графика функции $y = x^3$, в которых касательная образует с осью абсцисс угол, равный:

а) 30°; б) 45°; в) 60°.

1504. Найдите приближенное значение выражения:

а) $1{,}002^{100}$; в) $0{,}998^{20}$; д) $1{,}0003^{200}$; ж) $2{,}997^{50}$;
б) $0{,}992^{7}$; г) $0{,}99^{51}$; е) $1{,}005^{250}$; з) $1{,}997^{30}$.

1505. Найдите приближенное значение выражения:

а) $\sqrt{25{,}2}$; б) $\sqrt[3]{63{,}4}$; в) $\frac{1}{\sqrt{17{,}1}}$; г) $\frac{1}{1{,}983}$.

1506. Найдите ту первообразную для функции f, график которой проходит через точку L, учитывая, что:

а) $f(x) = 6\sqrt{2x + 5}$, L (2; 2);
б) $f(t) = 1 - t^2$, L (–3; 9);
в) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x - 5)^2}}$, L (–1; –4);
г) $f(x) = x^{-4}$, $L\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

1507. Сплавили 15 625 см³ одного металла и 8415 см³ другого металла и получили кусок сплава плотностью 8,32 г/см³. Определите, какие металлы сплавляли, учитывая, что массы компонентов сплава относятся как 7 : 3.

1508. Сплавили кусок меди и кусок цинка, массы которых относятся как 3 : 1. Определите массы компонентов сплава, учитывая, что кусок вещества с массой, равной массе сплава, и плотностью, равной среднему арифметическому плотностей компонентов сплава, занимает объем, равный 37 360 см³, а плотности меди и цинка соответственно равны 8,96 г/см³ и 7,13 г/см.

* * *

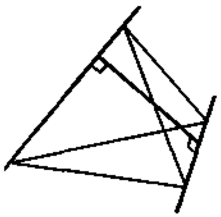
1509. Докажите неравенство $\frac{1+a}{1-2a} + \frac{1+b}{1-2b} + \frac{1+c}{1-2c} > 6$, учитывая, что a, b и c — стороны треугольника с периметром 1.

1510. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. На основании BC отмечена такая точка Q, что $\angle PQA = \angle PQD$. Докажите, что расстояние от точки C до прямой AQ равно расстоянию от точки B до прямой DQ.

1511. На крайней клетке полоски, содержащей 40 клеток в один ряд, лежит камешек. Его можно перемещать на любую свободную клетку. Играют вдвоем. Они по очереди переносят камешек на такое количество клеток, которое еще не встречалось. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто первым делает ход, или кто вторым?

ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Скрещивающиеся прямые



Скрещивающиеся прямые — прямые, не принадлежащие одной плоскости.

Признак. Прямые скрещивающиеся, если из двух прямых одна принадлежит некоторой плоскости, а вторая пересекает ее в точке, не принадлежащей первой прямой.

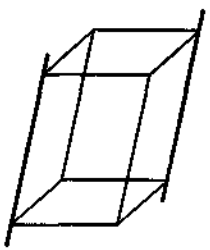
Свойства. Если прямые скрещивающиеся, то:

через каждую из них можно провести плоскость, параллельную другой прямой;

через них можно провести плоскости, параллельные друг другу;

они имеют единственный общий перпендикуляр.

Параллельные прямые



Параллельные прямые — прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек.

Признаки. Прямые параллельные, если:

они перпендикулярны одной плоскости;

они являются линиями пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Свойства. Если одна прямая параллельна второй, а вторая третьей, то первая и третья прямые также параллельны.

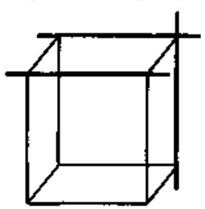
Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны друг другу.

Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и вторая прямая пересекает эту плоскость.

Пересекающиеся прямые

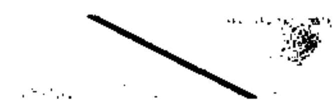
Пересекающиеся прямые — прямые, имеющие единственную общую точку.

Перпендикулярные прямые

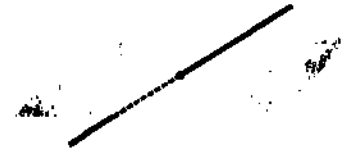


Перпендикулярные прямые — прямые, угол между которыми равен 90°.

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

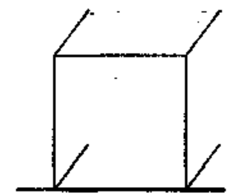


Прямая лежит в плоскости — каждая точка прямой принадлежит плоскости.



Пересекающиеся прямая и плоскость — прямая и плоскость, имеющие единственную общую точку.

Параллельные прямая и плоскость

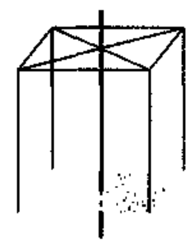


Параллельные прямая и плоскость — прямая и плоскость, не имеющие общих точек.

Признак. ***Прямая параллельна плоскости***, если она не принадлежит этой плоскости и параллельна какой-нибудь ее прямой.

Свойство. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то она пересекает ее по прямой, параллельной первой прямой.

Перпендикулярные прямая и плоскость



Прямая перпендикулярна плоскости — прямая перпендикулярна любой прямой этой плоскости.

Признак. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

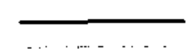
Свойства. Через каждую точку пространства проходит:

единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой;

единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

ДВЕ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пересекающиеся плоскости



Пересекающиеся плоскости — плоскости, имеющие единственную общую прямую.

Параллельные плоскости

Параллельные плоскости — плоскости, не имеющие общих точек.

Признаки. Плоскости параллельны, если:

одна из них проходит через две пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости;

две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости;

они перпендикулярны одной прямой.

Свойства. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

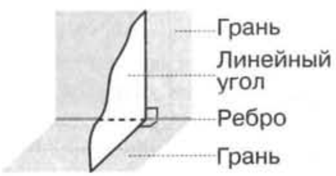
Две параллельные плоскости высекают из параллельных прямых равные отрезки.

Три параллельные плоскости высекают из произвольных прямых пропорциональные отрезки.

Если одна плоскость параллельна второй, а вторая — третьей, то первая и третья плоскости также параллельны.

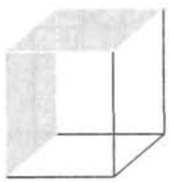
Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны друг другу.

Двугранный угол



Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Перпендикулярные плоскости



Перпендикулярные плоскости — пересекающиеся плоскости, угол между которыми равен 90°.

Признак. Плоскости перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости.

Свойства. Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна каждой из них.

Если через точку одной из перпендикулярных плоскостей проведена прямая, перпендикулярная другой плоскости, то эта прямая принадлежит первой плоскости.

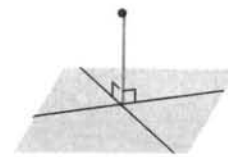
Перпендикуляр и наклонная к плоскости

Теорема о трех перпендикулярах. Если прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной, а если прямая плоскости перпендикулярна наклонной к плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной.

РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ

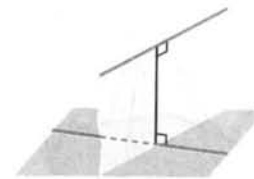
Расстояния в пространстве

Перпендикуляр к плоскости, проведенный из некоторой точки, меньше любой наклонной к этой плоскости, проведенной из этой же точки.



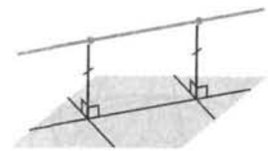
Расстояние от точки до плоскости — длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости.

Две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр.



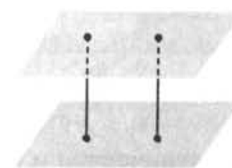
Расстояние между скрещивающимися прямыми — длина их общего перпендикуляра.

Расстояние от любой точки прямой, параллельной плоскости, до этой плоскости одно и то же и равно перпендикуляру, проведенному из какой-нибудь точки прямой к плоскости.



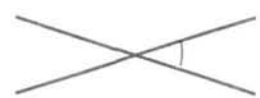
Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью — длина перпендикуляра, проведенного из какой-нибудь точки прямой к плоскости.

Расстояние от любой точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости одно и то же и равно длине их общего перпендикуляра.

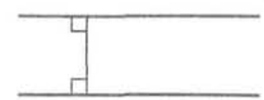


Расстояние между параллельными плоскостями — длина перпендикуляра, проведенного из какой-нибудь точки одной плоскости к другой плоскости.

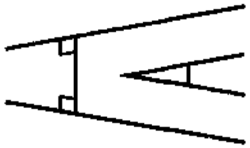
Углы в пространстве



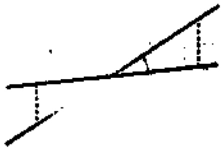
Угол между пересекающимися прямыми — один из четырех образованных ими углов, не больше 90°.



Угол между параллельными прямыми принимается равным нулю.

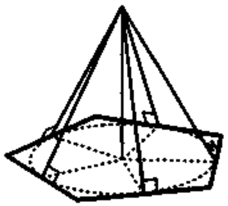


Угол между скрещивающимися прямыми — угол между пересекающимися прямыми, которые им параллельны.

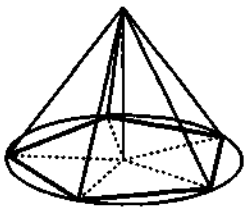


Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую, — угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

Угол между прямой и параллельной ей плоскостью принимается равным нулю.



Если данная точка пространства равноудалена от сторон многоугольника, то в этот многоугольник можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника.



Если данная точка пространства равноудалена от вершин многоугольника, то около этого многоугольника можно описать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника.

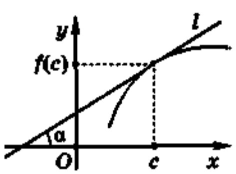
ПРОИЗВОДНАЯ

$\Delta x = x_1 - x$ — *приращение аргумента,*

$\Delta y = y(x_1) - y(x)$ — *приращение функции,*

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to \infty} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — *производная функции.*

Геометрический и механический смыслы производной



Производная $y'(c)$ — тангенс угла α наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой c.

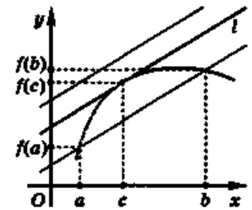
Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c; f(c))$ представляется уравнением $y = f(c) + f'(c)(x - c)$.

Производная $y'(c)$ — мгновенная скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой c.

Принцип непрерывности

Если функция $y = f(x)$ имеет производную и $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

Теорема Лагранжа

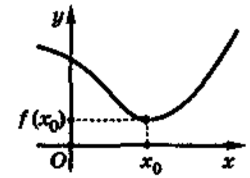


Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в точке промежутка $[a; b]$, то $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ для некоторого числа c из промежутка $(a; b)$.

Мгновенная скорость $f'(c)$ движения в некоторый момент c из промежутка $(a; b)$ совпадает со средней скоростью $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ движения на промежутке $[a; b]$.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

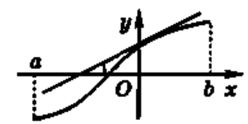
Исследование функции

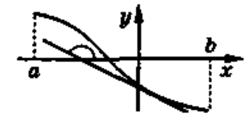


Критическая точка — внутренняя точка области определения, в которой производная равна нулю или не существует.

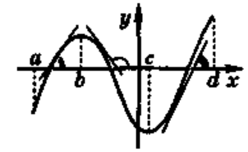
Максимум функции $y = f(x)$ — значение этой функции в такой точке x_0, что для всех значений переменной x из некоторой окрестности точки x_0 истинно неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Минимум функции $y = f(x)$ — значение этой функции в такой точке x_0, что для всех значений переменной x из некоторой окрестности точки x_0 истинно неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

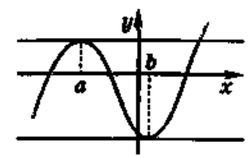




Если функция $f(x)$ в каждой точке промежутка $(a; b)$ имеет производную и если эта производная положительна, то на промежутке $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает, а если эта производная отрицательна, то на промежутке $(a; b)$ функция $f(x)$ убывает.

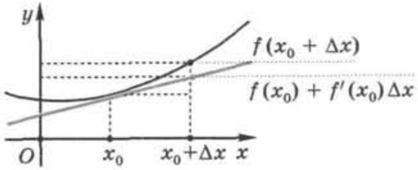


Если при переходе через критическую точку производная функции изменяет свой знак с плюса на минус, то эта критическая точка есть точка максимума, а если с минуса на плюс — то точка минимума.



Теорема Ферма. Если точка x_0 является точкой экстремума функции и в этой точке существует производная, то она равна нулю.

Приближенные вычисления

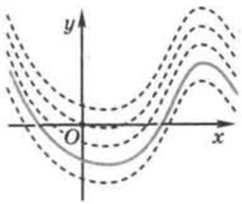


$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \qquad (x_0+\Delta x)^n\approx x_0^n+nx_0^{n-1}\Delta x$$

При малых значениях переменной x истинны приближенные равенства:

$$\sin x\approx x,\qquad \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2},\qquad \operatorname{tg} x\approx x,\qquad \operatorname{ctg} x\approx \frac{1}{x}.$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ

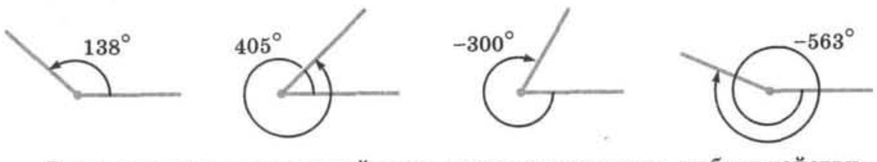


Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке — для всех значений переменной x из этого промежутка

$$F'(x)=f(x).$$

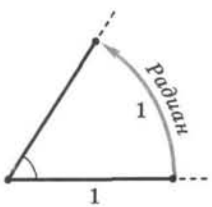
МЕРЫ УГЛА

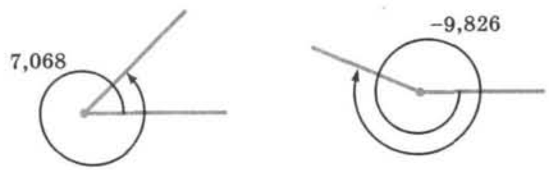
Градусная мера



Величина угла в градусной мере может выражаться любым действительным числом.

Радианная мера

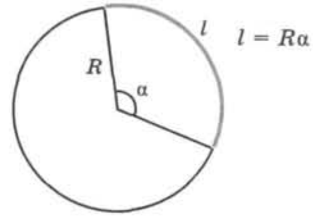


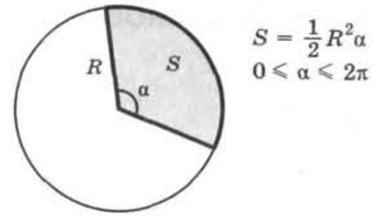


Радиан — угол, мера которого равна числу 1.

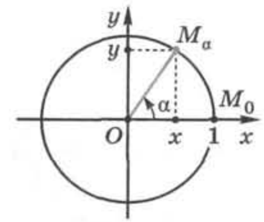
Величина угла в радианной мере может выражаться любым действительным числом.

Градусы	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330
Радианы	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$





СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС



Синус угла α — ордината y точки $M_\alpha(x;\,y)$, полученной поворотом точки $M_0(1;\,0)$ на угол α.

Косинус угла α — абсцисса x точки $M_\alpha(x;\,y)$, полученной поворотом точки $M_0(1;\,0)$ на угол α.

Тангенс угла α — отношение синуса этого угла к его косинусу.

Котангенс угла α — отношение косинуса этого угла к его синусу.

В этих определениях угол может быть выражен как в градусной, так и радианной мерах.

Четность

$\cos(-t)=\cos t;$
$\sin(-t)=-\sin t;$
$\operatorname{tg}(-t)=-\operatorname{tg} t;$
$\operatorname{ctg}(-t)=-\operatorname{ctg} t.$

Основные тригонометрические тождества

$\operatorname{tg} t=\dfrac{\sin t}{\cos t};\qquad \sin^2 t+\cos^2 t=1;$

$\operatorname{ctg} t=\dfrac{\cos t}{\sin t};\qquad 1+\operatorname{tg}^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t};$

$\operatorname{tg} t\cdot\operatorname{ctg} t=1;\qquad 1+\operatorname{ctg}^2 t=\dfrac{1}{\sin^2 t}.$

Формулы сложения

$\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v;$

$\cos(u-v)=\cos u\cos v+\sin u\sin v;$

$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v;$

$\sin(u-v)=\sin u\cos v-\cos u\sin v;$

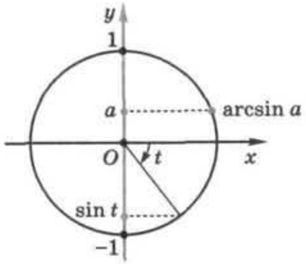
$\operatorname{tg}(u+v)=\dfrac{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v};$

$\operatorname{tg}(u-v)=\dfrac{\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} v}{1+\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}.$

Формулы приведения

x	$\frac{\pi}{2}\pm t$	$\pi\pm t$	$\frac{3\pi}{2}\pm t$	$2\pi\pm t$
$\sin x$	$\cos t$	$\mp\sin t$	$-\cos t$	$\pm\sin t$
$\cos x$	$\mp\sin t$	$-\cos t$	$\pm\sin t$	$\cos t$
$\operatorname{tg} x$	$\mp\operatorname{ctg} t$	$\pm\operatorname{tg} t$	$\mp\operatorname{ctg} t$	$\pm\operatorname{tg} t$
$\operatorname{ctg} x$	$\mp\operatorname{tg} t$	$\pm\operatorname{ctg} t$	$\mp\operatorname{tg} t$	$\pm\operatorname{ctg} t$

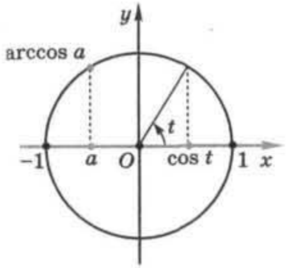
АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС, АРККОТАНГЕНС



$t = \arcsin a \equiv -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin t = a$.

Если $a \in [-1;\ 1]$, то $\sin(\arcsin a) = a$.

Если $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin t) = t$.



$t = \arccos a \equiv 0 \leqslant t \leqslant \pi$ и $\cos t = a$.

Если $a \in [-1;\ 1]$, то $\cos(\arccos a) = a$.

Если $t \in [0;\ \pi]$, то $\arccos(\cos t) = t$.

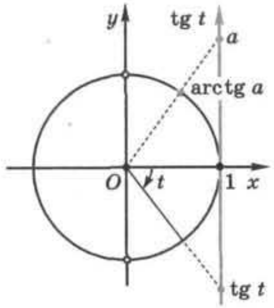
Если $a \in [-1;\ 1]$, то $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$,

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$, $\quad \arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

$t = \operatorname{arctg} a \equiv -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} t = a$.

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.

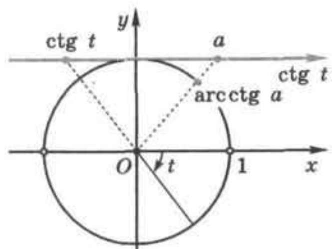
Если $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t$.



$t = \operatorname{arcctg} a \equiv 0 < t < \pi$ и $\operatorname{ctg} t = a$.

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$.

Если $t \in (0;\ \pi)$, то $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t$.



Для любого действительного a: $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$,

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$, $\quad \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Формулы двойного аргумента

$\sin 2u = 2\sin u \cos u$;

$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$;

$\operatorname{tg} 2u = \frac{2\operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u}$.

Формулы преобразования суммы в произведение

$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$;

$\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$;

$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$;

$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$.

Формулы половинного аргумента

$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$; $\qquad \operatorname{tg} u = \frac{\sin 2u}{1 + \cos 2u}$;

$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$; $\qquad \operatorname{tg} u = \frac{1 - \cos 2u}{\sin 2u}$.

Формулы преобразования произведения в сумму

$\sin u \cdot \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u - v) - \cos(u + v))$;

$\cos u \cdot \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u - v) + \cos(u + v))$;

$\sin u \cdot \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u - v) + \sin(u + v))$.

Формулы универсальной тригонометрической подстановки

$\sin 2u = \frac{2\operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg}^2 u}$; $\qquad \cos 2u = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 u}{1 + \operatorname{tg}^2 u}$.

Формула вспомогательного угла

Если $a \neq 0$ или $b \neq 0$, то $a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(t + u)$,

где $\cos u = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin u = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

	Синус	Косинус
$D(f)$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
$E(f)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Четность	Нечетная	Четная
Наименьший положительный период	2π	2π
Промежутки возрастания	$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$	$[-\pi+2k\pi; 0+2k\pi]$
Промежутки убывания	$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$	$[0+2k\pi; \pi+2k\pi]$
Нули	$k\pi$	$\frac{\pi}{2}+k\pi$
Промежутки положительных значений	$(2k\pi; \pi+2k\pi)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$
Промежутки отрицательных значений	$(-\pi+2k\pi; 2k\pi)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$
Точки максимума	$\frac{\pi}{2}+2k\pi$	$2k\pi$
Точки минимума	$-\frac{\pi}{2}+2k\pi$	$\pi+2k\pi$

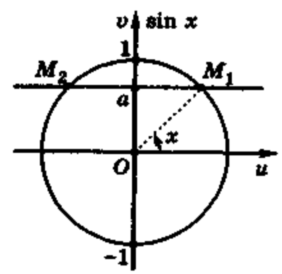
	Тангенс	Котангенс
$D(f)$	$\boldsymbol{R}$, без чисел $\frac{\pi}{2}+k\pi$	$\boldsymbol{R}$, без чисел $k\pi$
$E(f)$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
Четность	Нечетная	нечетная
Наименьший положительный период	π	π
Промежутки возрастания	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	Нет
Промежутки убывания	Нет	$(0+2k\pi; \pi+2k\pi)$
Нули	$k\pi$	$\frac{\pi}{2}+k\pi$
Промежутки положительных значений	$\left(k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	$\left(k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$
Промежутки отрицательных значений	$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \pi+2k\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \pi+2k\pi\right)$
Точки максимума	Нет	Нет
Точки минимума	Нет	Нет

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

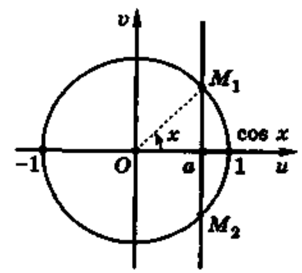
	$D(f)$	$E(f)$	Четность	Монотонность
Арксинус	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$	Нечетная	Возрастает
Арккосинус	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	Ни четная, ни нечетная	Убывает
Арктангенс	$\boldsymbol{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$	Нечетная	Возрастает
Арккотангенс	$\boldsymbol{R}$	$(0; \pi)$	Ни четная, ни нечетная	Убывает

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

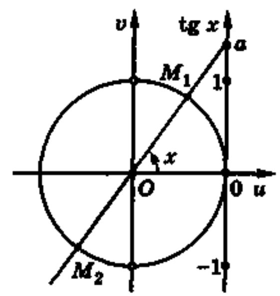
Множества корней



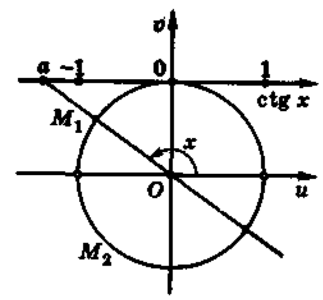
$\sin x = a$
$\{(-1)^m \arcsin a + m\pi \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$



$\cos x = a$
$\{\pm\arccos a + 2m\pi \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$



$\mathrm{tg}\, x = a$
$\{\mathrm{arctg}\, a + m\pi \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$



$\mathrm{ctg}\, x = a$
$\{\mathrm{arcctg}\, a + m\pi \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$

Раздел II

216. а) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$; б) $\frac{a^2-ab+b^2}{ab(a-b)}$; в) a^3+b^3; г) $\frac{(a+b)^2}{a-b}$. **217.** а) $\frac{2}{(5x+1)(5x-1)^2}$; б) $\frac{3}{2(9-4y^2)}$; в) $\frac{ab}{a+b}$; г) $\frac{8}{m^2-4}$. **218.** а) $2-\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}+2$; в) $\frac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}{3}$; г) $\sqrt[3]{2}+1$. **219.** а) -2; б) $\sqrt{ab}$; в) $-\frac{a+b}{a-b}$; г) $4\frac{x}{y}-2$. **223.** 18 кг · м/с, 42 кг · м/с. **224.** 6 м/с, 24 м/с. **233.** а) $-0{,}25$; б) $-\frac{1}{9}$; в) $-\frac{1}{16}$. **234.** г) $-\frac{2}{y^3}$. **235.** а) $4c^3$; б) $2c+3\sqrt{c}+1$; в) $-\frac{3}{(c-2)^2}$; г) $-\frac{1}{(c-1)^2}$; д) $1-\frac{1}{(c+1)^2}$; е) $\frac{-1+8c-2c^2}{(2c^2-1)^2}$; ж) $\frac{4c}{(c^2+1)^2}$; з) $-\frac{3c^2}{(c^3+1)^2}$; и) $3c^2+2c+2-\frac{2}{c^2}-\frac{2}{c^3}$; к) $7c^6+1+\frac{1}{c^2}+\frac{7}{c^8}$; л) $3c^2-6c-8+\frac{3\sqrt{c}}{2}-\frac{3}{2\sqrt{c}}+\frac{4}{c\sqrt{c}}$; м) $\frac{\sqrt{c}-2}{6\sqrt[3]{c^2}(\sqrt{c}-1)^2}$. **236.** а) $2-y$; б) $\sqrt{2-y^2}$; в) $2-\left(\frac{y}{y-3}\right)^2$; г) $1-\frac{3}{y^2+1}$; д) $\sqrt{\frac{y}{y-3}}$; е) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y-3}}$. **238.** а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=x^2$; в) $f(x)=\frac{1}{x}$; г) $f(x)=\frac{x}{2}$; д) $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)$; е) $f(x)=-\sqrt{x-1}$. **239.** а) $28(2y-7)^{13}$; б) $50(3+5y)^9$; в) $-21(7y-1)^{-4}$; г) $-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}y+2\right)^{-6}$; д) $\frac{1}{\sqrt{2y+3}}$; е) $-\frac{1}{4\sqrt{12-y}}$; ж) $\frac{5}{2\sqrt{5y-8}}$; з) $-\frac{2}{\sqrt{7-4y}}$; и) $\frac{4a}{\sqrt{4a^2-1}}$; к) $\frac{a}{\sqrt{3a^2+63}}$; л) $\frac{9a}{\sqrt{9a^2-16}}$; м) $-\frac{9a^2}{\sqrt{7-3a^3}}$; н) $65(5e-2)^{12}-60(3e+7)^{19}$; о) $45(3e-2)^{14}+8(3e-1)^3$; п) $\frac{3}{\sqrt{6e-8}}-\frac{4e}{\sqrt{4e^2-3}}$; р) $\frac{1}{\sqrt{9+2e}}-\frac{e}{\sqrt{2e^2-8}}$. **240.** а) $7(m-3)^6$; б) $27(3m-4)^8$; в) $-8(1-2m)^3$; г) $-5(1-m)^4$; д) $2m-1$; е) $-\frac{9}{(3m+1)^4}$; ж) $-\frac{18}{(3m+2)^4}$; з) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{m}}$; и) $-\frac{1}{2\sqrt{-m}}$; к) $\frac{5}{2\sqrt{5m-1}}$; л) $\frac{5(m+2)^4}{2\sqrt{(m+2)^5}}$; м) $\frac{2}{3\sqrt[3]{(2m-7)^2}}$. **241.** а) $\frac{5}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)^4$; б) $\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5+1}}$; в) $\frac{1}{4\sqrt{x\left(1+\sqrt{x}\right)}}$; г) $12(x+1)^3((x+1)^4-2)^2$; д) $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-1)^2}}$; е) $\frac{x^2-1}{2(x^2+1)\sqrt{x^3+x}}$. **254.** 43 см; 22 см. **261.** а) $(-2; 0)$, $(0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$, $\left(\sqrt[3]{3}; +\infty\right)$. **263.** д) На $(-3; 3)$ убывает; е) на $(0; 2)$ убывает; ж) на $(-3; 1)$ убывает; з) везде убывает. **264.** д) Везде возрастает; е) на $(-2; 2)$ убывает; ж) на $(-1; 1)$ возрастает; и) везде возрастает; к) возрастает на $(-1; 0)$ и на $(1; -\infty)$; л) убывает на $(-\infty; 3)$; м) возрастает на $(-2; +\infty)$. **265.** а) Возрастает на $(0; 0{,}5)$ и на $(1; +\infty)$; б) убывает на $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$; в) убывает на $(-1; 0)$ и на $(0; 1)$;

г) возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; д) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; 1)$; е) убывает на $(-\infty; -1)$, на $(-1; 1)$ и на $(1; +\infty)$; ж) возрастает на $(-1; 1)$; з) возрастает на $(1; 2)$ и $(2; 4)$; и) убывает на $(-1; 1)$; к) убывает на $(-1; 0)$; л) убывает на $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$; м) возрастает на $(0; +\infty)$. **273.** а) 2; б) 1; в) ± 2; г) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; д) ± 1; е) ± 2. **275.** д) $y_{\min}=y(-2)=-16$, $y_{\max}=y(2)=16$; е) $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(2)=-16$; ж) $y_{\max}=y\left(-1-\sqrt{5}\right)=\frac{29+26\sqrt{5}}{3}$, $y_{\min}=y\left(-1+\sqrt{5}\right)=\frac{29-26\sqrt{5}}{3}$; з) $y_{\max}=y(-2)=69$, $y_{\min}=y(5)=-399$. **281.** б) $a=0$ — точка минимума; в) критических точек нет; г) критические точки 0, ± 2; $a=0$ — точка минимума. **282.** д) Убывает на $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ и на $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; е) возрастает на $(-\infty; -2)$ и на $(-2; +\infty)$; ж) возрастает на $(0; 3{,}2)$ и убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(3{,}2; +\infty)$; з) убывает на $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$ и на $\left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, убывает на $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 2\right)$, $(2; +\infty)$; $t_{\max}=t\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=3\sqrt{3}$, $t_{\min}=t\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-3\sqrt{3}$. **283.** а) Возрастает на $(-\infty; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(8; 12)$, возрастает на $(0; 8)$ и на $(12; +\infty)$; в) убывает на $(-\infty; 0)$ и возрастает на $(0; +\infty)$; г) возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(2; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$ и на $(1; 2)$. **286.** $y_{\max}=y(26)$. **287.** $y_{\max}=y(-3)$. **288.** $a=1$. **291.** а) $(-1; 0)\cup(1; 3)$; б) $(-\infty; 1)$; в) $\left[\frac{1}{3}; 8\frac{2}{3}\right)$; г) $(-\infty; 0{,}5)$. **292.** а) 0; 6; б) -3. **295.** 14 кг и 22 кг или 11,4 кг и 24,6 кг. **296.** 3 м/с² и 21 м/с² или $4\frac{6}{7}$ м/с² и $19\frac{1}{7}$ м/с². **301.** а) $\underset{[0;1]}{f_{\text{наиб}}}=f(0)=3$; $\underset{[0;1]}{f_{\text{наим}}}=f(1)=-3$; б) $\underset{[-3;1]}{f_{\text{наиб}}}=f(1)=3$; $\underset{[-3;1]}{f_{\text{наим}}}=f(-2)=-6$; в) $\underset{[0;2]}{f_{\text{наиб}}}=f(2)=14$; $\underset{[0;2]}{f_{\text{наим}}}=f(0)=0$; г) $\underset{[-1;3]}{f_{\text{наиб}}}=f(3)=18$; $\underset{[-1;3]}{f_{\text{наим}}}=f(1)=-2$; д) $\underset{[1;4]}{f_{\text{наиб}}}=f(1)=4$; $\underset{[1;4]}{f_{\text{наим}}}=f(2)=1$; е) $\underset{[0;4]}{f_{\text{наиб}}}=f(2{,}25)=0{,}75$; $\underset{[0;4]}{f_{\text{наим}}}=f(0)=0$. **302.** а) $\underset{[-4;4]}{f_{\text{наиб}}}=f(\pm 4)=105$; $\underset{[-4;4]}{f_{\text{наим}}}=f\left(\pm\sqrt{5}\right)=-16$; б) $\underset{[0;3]}{f_{\text{наиб}}}=f(3)=169$; $\underset{[0;3]}{f_{\text{наим}}}=f(1)=1$; в) $\underset{[-1;2]}{f_{\text{наиб}}}=f(2)=3375$; $\underset{[-1;2]}{f_{\text{наим}}}=f(0)=-1$; г) $\underset{[0;2]}{f_{\text{наиб}}}=f(2)=\frac{2}{3}$; $\underset{[0;2]}{f_{\text{наим}}}=f(0)=0$. **303.** а) $\underset{[1;4]}{f_{\text{наиб}}}=f(1)=82{,}5$; $\underset{[1;4]}{f_{\text{наим}}}=f(3)=40{,}5$; б) $\underset{[-5;-2,5]}{f_{\text{наиб}}}=f(-3)=-4$; $\underset{[-5;-2,5]}{f_{\text{наим}}}=f(-5)=-5\frac{1}{3}$. **304.** а) $\underset{[-4;0]}{f_{\text{наиб}}}=27=\underset{[3;4]}{f_{\text{наим}}}$; б) $\underset{[-0,5;0,5]}{f_{\text{наиб}}}=4<12=\underset{[2;3]}{f_{\text{наим}}}$. **305.** а) $\underset{[-1;1]}{f_{\text{наиб}}}=f(0)=-9$; $\underset{[-1;1]}{f_{\text{наим}}}=f(1)=f(-1)=-16$; $\underset{[0;3]}{f_{\text{наиб}}}=f(3)=0$; $\underset{[0;3]}{f_{\text{наим}}}=f(1)=-16$; б) $\underset{[0;2]}{g_{\text{наиб}}}=g(2)=47$; $\underset{[0;2]}{g_{\text{наим}}}=g(1)=-11$; $\underset{[1;3]}{g_{\text{наиб}}}=g(3)=585$; $\underset{[1;3]}{g_{\text{наим}}}=g(1)=-11$; в) $\underset{[-4;-1]}{u_{\text{наиб}}}=u(-4)=u(-1)=-5$; $\underset{[-4;-1]}{u_{\text{наим}}}=u(-2)=-4$; $\underset{[1;3]}{u_{\text{наиб}}}=u(1)=5$; $\underset{[1;3]}{u_{\text{наим}}}=u(3)=-\frac{13}{3}$; г) $\underset{[-3;-2]}{h_{\text{наиб}}}=h(-3)=-\frac{13}{3}$; $\underset{[-3;-2]}{h_{\text{наим}}}=h(-2)=-4$; $\underset{[1;5]}{h_{\text{наиб}}}=h(5)=5{,}8$; $\underset{[1;5]}{h_{\text{наим}}}=h(2)=4$. **306.** а) $\underset{[-1;1]}{f_{\text{наиб}}}=f(1)=5$; $\underset{[-1;1]}{f_{\text{наим}}}=f(0)=0$; б) $\underset{[-1;2]}{f_{\text{наиб}}}=f(0)=1$; $\underset{[-1;2]}{f_{\text{наим}}}=f(2)=-15$; в) $\underset{[-1;3]}{f_{\text{наиб}}}=f(3)=34$;

$\underset{[-1;3]}{f_{\text{наим}}} = f(-1) = 2$; г) $\underset{[0;2]}{f_{\text{наиб}}} = f(1) = 3\frac{1}{3}$; $\underset{[0;2]}{f_{\text{наим}}} = f(2) = -3\frac{1}{3}$; д) $\underset{[0;2]}{f_{\text{наиб}}} = f(2) = 1$; $\underset{[0;2]}{f_{\text{наим}}} = f(0) = \frac{1}{3}$; е) $\underset{[0,5;4]}{f_{\text{наиб}}} = f(4) = 4{,}25$; $\underset{[0,5;4]}{f_{\text{наим}}} = f(1) = 2$; ж) $\underset{[0;4]}{f_{\text{наиб}}} = f(0{,}25) = 0{,}25$; $\underset{[0;4]}{f_{\text{наим}}} = f(4) = -2$; з) $\underset{[0;9]}{f_{\text{наиб}}} = f(2) = 3$; $\underset{[0;9]}{f_{\text{наим}}} = f(1) = -1$; и) $\underset{[-1;1]}{f_{\text{наиб}}} = f(1) = 19$; $\underset{[-1;1]}{f_{\text{наим}}} = f\left(\frac{1}{7}\right) = 5\frac{38}{49}$; к) $\underset{[-0,5;3]}{f_{\text{наиб}}} = f(2) = 15$; $\underset{[-0,5;3]}{f_{\text{наим}}} = f(-0{,}5) = -35$. **309.** При $a < -1$ и при $a > 1$. **310.** а) 1; б) 1; в) 2; г) 2. **311.** а) 1; б) $\sqrt[3]{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **312.** а) $8 + 8$; б) $6 \cdot 6$. **314.** 8 см и 8 см. **315.** а) $5 + 5$; б) $4 + 4$. **318.** а) $6 + 2$; б) $12 + 24 + 18$. **319.** 50 м $\times$ 100 м. **320.** $2\sqrt{6}$ км. **321.** 350 м^2 и 250 м^2. **322.** $MX = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ AB$. **323.** $0{,}5a$, $0{,}5h$. **325.** 60°. **326.** $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. **327.** а) $4 \times 4 \times 2$; б) $3 \times 6 \times 2$. **328.** 2 см, 2 см. **329.** $10 \times 10 \times 5$. **330.** $r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **331.** $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **332.** $\sqrt[3]{4SQ^2}$. **333.** За 1 км до B. **334.** а) 3; б) 1 и -2; в) таких точек нет; г) 0 и 1. **335.** а) -8; б) 1; в) 12; г) 2. **336.** а) -1; б) 1. **337.** а) $c = \frac{1}{4}$; б) $c = \frac{1}{12}$. **338.** а) $4x - y - 2 = 0$; б) $4x + y + 2 = 0$; в) $4x - 2y - 1 = 0$; г) $8x + 8y + 1 = 0$. **339.** $x + 2y - 4 = 0$. **340.** $x + y - 1 = 0$. **341.** а) $3x + 16y + 2 = 0$; б) $3x + y - 2 = 0$. **342.** $(2; -4)$. **343.** $(1; 1)$, $(-1; -1)$. **344.** а) $(1; 0{,}5)$, $(-1; -0{,}5)$; б) $(0; 0)$; в) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; г) $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **345.** $y = 4x + 1$ и $y = -2x - 7$; $y = -2x + 4$ и $y = 4x - 8$. **346.** $y = 0$ и $x = 0{,}90°$; $y = 2x - 1$ и $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **347.** а) $(0{,}5; 0{,}25)$, $(3{,}5; 8{,}75)$; б) $x + y = 1$, $y = 7x + 17$. **349.** а) $\approx 1{,}004$. **350.** а) $\approx 0{,}6838$; б) $\approx 0{,}588$. **351.** а) $\approx 2{,}03$; б) $\approx 22{,}44$; в) $\approx 2{,}39$; г) $\approx 10{,}03$. **352.** а) $\approx 30{,}018$; $\approx 0{,}58$; б) $\approx 23{,}568$; $\approx -1{,}05$; в) $\approx 190{,}13$; $\approx 1{,}36$; г) $\approx 59{,}08$; $\approx 11{,}76$. **353.** $\approx 1{,}03$; $0{,}05\,\%$. **355.** а) $\approx 1{,}002$; б) $\approx 5{,}001$; в) $\approx 0{,}997$; г) $\approx 0{,}996$; д) $\approx 5{,}10$; е) $\approx 7{,}002$; ж) $\approx 3{,}98$; з) $\approx 9{,}04$. **356.** а) $\approx 0{,}94$; б) $\approx 1{,}08$; в) $\approx 1{,}0078$; г) $\approx 0{,}99$; д) $\approx 2{,}72$; е) $\approx 1{,}79$. **361.** 2968 ц. **362.** 3055 ц, 3500 ц. **368.** а) h; б) f; в) f; г) h. **369.** а) $4{,}7x$; б) $1{,}5x^2$; в) x^3; г) $-7{,}2x$; д) $-t^3$; е) $-t^4$; ж) $-0{,}5s^2$; з) $-\frac{1}{s}$; и) $\frac{1}{s^2}$; к) $\frac{1}{35u^5}$; л) $\frac{1}{49}u^7$; м) $-\frac{2}{u^2}$. **370.** а) $0{,}5x^2 + 4x$; б) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$; в) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3$; г) $-\frac{1}{t} + \frac{t^2}{2}$; д) $\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{t}$; е) $3t + \frac{1}{2t^2}$; ж) $\frac{2}{3}\sqrt{z^3} + \frac{z^2}{2}$; з) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{3z^4} + \frac{z^4}{4}$; и) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{4z^5} - \frac{2}{3}\sqrt{z^3}$. **371.** а) $\frac{x^4}{4}$, $\frac{x^4}{4} + 1$; б) $1{,}5x^2 - x^3$, $1{,}5x^2 - x^3 + 1$; в) $4x + \frac{1}{3x^3}$; г) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$, $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + 1$; д) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$, $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + 1$; е) $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$, $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + 1$; ж) $\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 1$; з) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1$. **372.** а) $2x - \frac{1}{2}x^2 + c$; б) $x^3 + c$; в) $\frac{3}{2}x^4 + c$; е) $\frac{1}{12}x^{12} + c$; ж) $-\frac{1}{t} + c$; з) $3t + \frac{1}{2t^2} + c$; и) $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3t^3} + c$; к) $\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c$; л) $2t + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c$;

м) $\frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c$. **373.** а) $3x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + c$; б) $x^2 - \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$; в) $x + \frac{1}{2x^2} + x^4 + c$; г) $\frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 7x + c$; д) $\frac{1}{15}(3t-7)^5 + c$; е) $\frac{2}{9}\sqrt{(3t-4)^3} + c$; ж) $-\frac{1}{16}(3-2t)^8 + c$; з) $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(4t+1)^4} + c$; и) $\frac{1}{11(5-11y)^3} + c$; к) $-\frac{3}{10(5y+1)^2} + c$; л) $-\frac{14}{5\sqrt{5y+2}} + c$; м) $\frac{2}{y} + 12\sqrt[4]{y-1} + c$. **374.** а) $x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-3)^4} + c$; б) $-\frac{1}{2t^2} - \frac{4}{5\sqrt{t^5}} - \frac{3}{4}t^4 + c$; в) $\frac{2}{3(4-3s)^2} - 375s + 450s^3 - 324s^5 + \frac{647}{7}s^7 + c$; г) $\frac{6}{7\sqrt[3]{(a-1)^7}} - \frac{250}{7}a^7 + 90a^5 - 90a^3 + 54a + c$; д) $-\frac{2}{3(4-3x)^3} + \frac{2}{9}\sqrt{3x-2} - \frac{18}{7}x^7 + 3x^4 - 2x + c$; е) $\frac{11}{7}y^7 - \frac{66}{5}y^5 + \frac{55}{2}y^4 + 33y^3 - 165y^2 + 275y - \frac{10}{9}\sqrt[4]{(6y-2)^3} + c$. **375.** а) $-\frac{1}{x} - 10$; б) $\frac{x^4+7}{4}$; в) $\frac{4s^3}{3}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{u^3} + u$. **376.** а) $t^2 + t$; б) $y^3 - y^2 + 4$; в) $\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{13}{3}$. **377.** а) $2x^2 - \frac{1}{x} + 1$; б) $t - t^2 + 8$; в) $\frac{u^4}{4} + 2u + 3$; г) $-\frac{1}{2z^2} - 2z^5 + 3z + \frac{9}{2}$. **378.** а) $2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, $2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4$; б) $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{x}$, $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{8}{7}x^{\frac{7}{4}}$, $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{8}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4$; г) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{3x^2}{2}$, $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{3x^2}{2} + 3$. **379.** а) F_2; б) F_1; в) F_1; г) F_2. **380.** а) $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t$; б) $s(t) = 3t + t^2 + \frac{2}{3}t^3$; в) $s(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7$. **381.** а) $s(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 2t + 4$; б) $s(t) = -\frac{t^3}{2} + t^2 + \frac{1}{2}t + 1$; в) $s(t) = t^3 + t + 1$; г) $s(t) = \frac{1}{6}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{5}{3}$. **382.** а) $s(t) = -0{,}5t^3 + t^2 + 3{,}5t - 9$; б) $s(t) = t^3 - t^2 + 3t$; в) $s(t) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{12}t^2 + \frac{5}{3}t + \frac{25}{3}$; г) $s(t) = \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 7t + \frac{23}{3}$. **385.** $\sqrt[3]{4{,}5k^2}$. **386.** а) $y = \frac{x^3-5}{3}$; б) $y = -\frac{1}{t}$; в) $z = \frac{1}{y} + 2$; г) $z = \sqrt[3]{3u+9} - 2$. **387.** а) $y = c$; б) $y = 0{,}2x^5 + c$; в) $y = ax + b$; г) $y = \frac{x^3}{6} + x^2 + ax + b$; д) $y = \frac{1}{2x} + ax + b$; е) $y = -\frac{x^3}{3} + 2{,}5x^2 + ax + b$. **389.** а) $26\,072 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$; б) $-0{,}056$; в) не существует. **395.** а) 77 мм, 91 мм; б) 80 мм, 40 мм; 80 мм, 88 мм; в) 60 мм, 84 мм; г) $\approx$ 86,8 мм; $\approx$ 91,4 мм; д) $\approx$ 62°33′; $\approx$ 84°59′. **396.** а) 45 мм; 60 мм; б) 87,5 мм и 52,5 мм; 100 мм и 60 мм; в) 70 мм, 80 мм; г) $\approx$ 57,0 мм, $\approx$ 72,1 мм; д) $\approx$ 52°8′; $\approx$ 56°20′.

Раздел III

404. а) 7 см; б) 30 см. **405.** б) 200 см. **406.** 50 см. **407.** 40 мм. **418.** а) 40°; б) 45°; в) 90°. **419.** а) 58°; б) 47°. **420.** а) 90°; б) 64°. **422.** В 5 раз. **425.** $1{,}5 + \sqrt{2}$ см; $\frac{3\sqrt{7}}{16}$ см^2. **426.** 27 см. **427.** 40 м или 8 м. **428.** 5 см. **429.** 12 см. **430.** 24 см. **432.** 49 см. **433.** б) 12 см. **434.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **435.** $\frac{9m^2\sqrt{3}}{8}$.

448. 48 ц/га; 32 ц/га. **449.** 54 мм и 48 мм, 48 мм и 31 мм. **450.** 41 см^2; 23 см^2. **474.** 96 см. **475.** 50 см. **476.** 24 см. **479.** $4S$. **480.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **481.** $\frac{2}{3}m$. **482.** б) 1600 см^2. **483.** $\frac{\sqrt{S}}{6}$. **484.** б) 5 см. **486.** 10 см. **487.** 24 см; 36 см. **488.** 25 см. **489.** 16 см. **492.** $\frac{\sqrt{S\sqrt{15}}}{4}$. **498.** 1620 см^2. **499.** 10 г, 18 г. **500.** 10 г, 16 г. **501.** 20 м/с, 22 м/с. **502.** 20 м/с, 25 м/с. **511.** б) 12 см^2. **516.** а) 18 см; 15 см; б) 54 см; 72 см. **519.** а) $2\sqrt{136-45\sqrt{5}}$; $3\sqrt{106-21\sqrt{5}}$; 29; б) $45\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\frac{189}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; 210. **520.** б) 4 : 9. **521.** в) 6 см^2. **529.** б) 8 см. **531.** 4 см^2. **541.** 46 см. **544.** 109 см. **545.** 1,5 S. **546.** б) 140 см. **547.** 16 q. **548.** 64 см^2. **549.** 72 см. **550.** 38 см. **551.** $\frac{4}{3}S$. **552.** $\frac{5}{4}Q$. **553.** $\frac{1}{9}S$; $\frac{4}{9}S$. **554.** 0,16 q. **555.** 1 : 3. **556.** $\frac{9m}{64}\sqrt{4m^2-n^2}$. **557.** 32 см^2. **569.** 38 ц/га, 45 ц/га. **570.** 17 см, 50 см. **571.** 2 см, 5 см.

Раздел IV

583. а) 90°, 45°, 45°; $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$; б) 90°, 36°, 54°; $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10}$; в) 90°, 45°, 45°; $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$; г) 40°, 70°, 90°, 160°; $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{18}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{9}$; д) 60°, 120°, 75°, 105°; $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$; е) 80°, 100°, 100°, 80°; $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$; ж) 90°, 90°, 75°, 105°; $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{18}$, $\frac{7\pi}{18}$; з) 15°, 165°, 15°, 165°; $\frac{\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$. **584.** а) $3\pi\frac{1}{с}$; б) $10\pi\ \frac{1}{с}$; в) $22\pi\ \frac{1}{с}$; г) $66\frac{2}{3}\ \pi\frac{1}{с}$. **585.** а) $120\pi\ \frac{1}{ч}$; б) $2\pi\ \frac{1}{ч}$; в) $\frac{\pi}{6}\ \frac{1}{ч}$. **588.** 11°15′; $\frac{\pi}{16}$. **593.** а) 5; б) 1,5; в) 2π; г) 3,05. **595.** а) 29,4 см^2; б) 132,47 см^2; в) 282,6 см^2; г) 103,5 см^2. **596.** а) 30 м^2; б) 100 м^2; в) 239 м^2; г) 492 м^2. **603.** а) 0; б) $-2\sqrt{3}$; в) -1; г) 1. **604.** а) 1; б) 1; в) -1; г) $\cos^2\alpha$. **605.** а) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; в) $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; г) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. **606.** а) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$; б) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$; в) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$; г) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. **607.** а) 0,28; б) 0,96; в) $-0,352$; г) 0,936. **608.** 10 см, 17 см. **609.** а) 6 см, 16 см; б) 7 см, 8 см; в) 5 см, 21 см; г) 4 см, 20 см. **614.** $0,5\left(S_1+S_2\pm\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2+2S_1S_2\cos 2\alpha}\right)$. **653.** а) 8; б) 10; в) 13; г) 21. **654.** $\frac{128}{49}\left(9-4\sqrt{2}\right)$ см^2. **655.** $81\sqrt{3}$ см^2. **656.** 1152 см^2. **657.** $\frac{k\sqrt{k^2+l^2}}{4}$. **658.** 94 см^2. **659.** $\frac{a}{3}$. **660.** $7\sqrt{3}-12$. **662.** 21 ц/га. **663.** 37 км. **664.** 196 м^2, 464 м^2. **665.** $\frac{3}{4}ml$. **695.** а) 132°, 120°, 48°, 60°; б) 12°; в) 84°. **697.** 45°. **698.** $1+\operatorname{ctg}\alpha+0,5\operatorname{ctg}^2\alpha$. **700.** 70 км/ч. **701.** 24 км и 25 км. **702.** 117 см^2 или 209 см^2. **710.** в) $\frac{\pi}{7}$; г) $-\frac{\pi}{4}$; д) $\pi-x$; е) $\pi-x$. **714.** а) 0,6; б) $-0,8$; в) $\sqrt{2\sqrt{6}-4}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **715.** а) 0,4; $\frac{\sqrt{21}}{4}$; $\frac{2}{\sqrt{21}}$; $\frac{\sqrt{21}}{2}$; б) $-0,8$; 0,6; $-\frac{4}{3}$; $-\frac{3}{4}$. **720.** а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{7}$; в) $\frac{3\pi}{5}$; г) $\frac{4\pi}{5}$; д) $\frac{3\pi}{5}$; е) $\frac{4\pi}{5}$. **723.** а) 0,5; б) нет корней; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

728. в) $\sqrt{4\sqrt{2}-5}$; г) не существует. **731.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $4\pi-12$; в) $4\pi-12$. **737.** а) $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$; б) $-\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{3}$; в) $-\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; $-\frac{12}{5}$; $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$. **739.** а) $\frac{\pi}{2}-2$; б) $\pi-2$; в) $4\pi-10$; г) $10-\frac{5\pi}{2}$. **742.** а) 1; б) $\frac{\pi}{7}$. **743.** а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{4\pi}{7}$; в) π. **744.** а) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{34}}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; д) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; е) $-\frac{5}{\sqrt{11}}$. **745.** а) $\frac{2\pi}{5}$; б) $4\pi-11$; в) $8-2\pi$; г) $3\pi-10$; д) $\frac{3\pi}{10}$; е) $\frac{9\pi}{10}$. **746.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **747.** а) $-\frac{16}{65}$; б) $\frac{77}{85}$; в) $2\frac{1}{16}$; г) 0; д) $\frac{33}{65}$; е) $-\frac{16}{63}$. **755.** а) $\operatorname{arctg}\frac{56}{33}$; б) $-\operatorname{arctg}\frac{16}{63}$; в) $-\operatorname{arctg}\frac{39}{95}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{84}{13}$; д) $\frac{3\pi}{4}$; е) $\frac{\pi}{4}$. **756.** а) $\arccos\left(-\frac{140}{221}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{36}{325}\right)$; в) $\arccos\frac{63}{65}$; г) $\arccos\left(-\frac{119}{169}\right)$; д) $\arccos\frac{36}{85}$; е) $\arccos\left(-\frac{36}{97}\right)$. **758.** а) $\arccos 0,3$; б) $\arcsin\frac{4}{11}$; в) $\operatorname{arcctg} 3$; г) $\operatorname{arcctg} h$. **760.** а) 0; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) 0. **762.** а) $\frac{161}{289}$; б) $\frac{13}{85}$; в) $\frac{8\sqrt{5}}{81}$; г) $\frac{12}{25}$. **763.** а) $mn-\sqrt{(1-m^2)(1-n^2)}$; г) $\frac{k\sqrt{1-l^2}+l\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{(1-k^2)(1-l^2)}-kl}$; д) $2p\sqrt{1-p^2}$; е) $\frac{2j}{1-j^2}$; ж) $\frac{1-h^2}{1+h^2}$; з) $\frac{2g}{1+g^2}$; и) $\frac{f^2-1}{f^2+1}$; к) $\sqrt{\frac{1+d}{2}}$; л) $\frac{s}{1+\sqrt{1+s^2}}$; м) $\sqrt{1+t^2}-t$. **772.** а) $\sqrt{R^2+S}\pm\sqrt{R^2-S}$; б) $\frac{S}{2r}+\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{S}{2r}-\frac{r}{2}\right)^2-S}$; в) $\sqrt{S\left(\frac{S}{h^2}+1\right)}\pm\sqrt{S\left(\frac{S}{h^2}-1\right)}$; г) $\sqrt{m^2+2S}+\sqrt{m^2-2S}$, $\sqrt{\frac{m^2}{4}+\frac{S}{2}}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{S}{2}}$ или $\sqrt{m^2+2S}-\sqrt{m^2-2S}$, $\sqrt{\frac{m^2}{4}+\frac{S}{2}}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{S}{2}}$; д) $\frac{S\sqrt{2}}{l}\pm\sqrt{\frac{2S^2}{l^2}-2S}$. **773.** В $\frac{25}{6\pi}$ раз. **774.** 48 или 96. **775.** 96 км/ч, 72 км/ч. **776.** 16 см, 25 см. **780.** а) $\frac{1}{\cos b}$; б) 13; в) 0; г) $\frac{2}{|\sin t|}$. **782.** а) $\cos c$; б) $\operatorname{tg} x$; в) $\cos 4\beta$; г) 1; д) $\operatorname{tg} c$; е) $\cos 2y$. **785.** б) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$; в) -1. **786.** а) $\sin 80°$; б) $-\cos 20°$; в) $\cos 2\beta$; г) $\cos 2\gamma+\sin 2\gamma$; д) $\cos^2 2\varphi$; е) $\frac{1}{1+\sin 2\beta}$. **790.** а) $\frac{2}{\sin x}$; б) $2\operatorname{ctg} y$; в) $2\operatorname{tg} a$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$. **791.** $\frac{120}{169}$, $\frac{119}{169}$. **792.** а) $1,5\pi$; б) π; в) 0; г) $1,5\pi$. **793.** а) $\frac{24}{25}$; $-\frac{7}{25}$; $-3\frac{3}{7}$; б) $-\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$; $1\frac{1}{119}$; в) $\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$; $-1\frac{1}{119}$; г) $-\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $-1\frac{1}{3}$. **795.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $\frac{8}{9}$; в) $\frac{2\sqrt{46}}{25}$; г) $-\frac{4\sqrt{82}}{49}$; д) $1\frac{7}{8}$; е) $-\frac{9}{40}$. **797.** а) $2\cos\beta$; б) если $0<\beta<\frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg} 2\beta>2\operatorname{tg}\beta$; если $\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} 2\beta<2\operatorname{tg}\beta$. **798.** а) 0; б) 0; в) $\pm\frac{\pi}{4}$. **799.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{13\pi}{12}$; в) 2π. **801.** а) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. **804.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **805.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{14}}{4}$;

$\frac{1}{\sqrt{7}}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac{3}{\sqrt{10}}$; -3. **807.** а) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$; $\frac{\sqrt{2}}{10}$; 7; в) $\frac{5}{\sqrt{34}}$; $-\frac{3}{\sqrt{34}}$; $-1\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}$. **808.** а) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\sqrt{2}-1$; б) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $2-\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$; $\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$; д) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$; $2\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{3}-2$; е) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$; $\sqrt{4-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$. **809.** 0,8; 0,6. **811.** а) 0,8; б) $\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$; в) -2. **813.** а) $\frac{5\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{2}$; в) $\frac{14\pi}{3}$. **815.** а) 0,6; $\pm 0{,}8$; б) $\frac{40}{41}$; $\pm\frac{9}{41}$; в) $\frac{24}{25}$; $-\frac{7}{25}$. **816.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\sqrt{5}+1$. **817.** а) $\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$; б) $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2y+\frac{1}{8}\cos 4y$; в) $\frac{1}{16}(1-\cos 4z-\cos 6z)$. **820.** д) $\sin x$; е) $\cos x$; ж) $\cos x$; з) $\sin x$. **822.** а) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,5°$; б) $-\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$; в) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right)$. **823.** а) $2\cos 22°\sin 39°$; б) $\sqrt{2}\sin 5°$; в) $4\cos^2 3°\sin 25°$; е) $4\cos 2x\cos^2 1{,}5x$. **824.** а) $-4\cos\beta\sin^2\frac{\beta}{2}$; б) $4\sin 2\gamma\cos\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $-4\cos 2z\sin\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; д) $\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$; е) $\mathrm{ctg}\,4a$. **825.** а) $\sin(a+b)\sin(a-b)$; б) $\sin(a+b)\sin(b-a)$; в) $-\cos(a+b)\cos(a-b)$; г) $\cos 4°\cos 36°$; д) $\sin 2q\sin 8q$; е) $-\cos(y+z)\cos(y-z)$. **828.** а) $\sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sqrt{2}\cos\left(k-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $2\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $2\sin\left(\frac{k}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{k}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $4\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; е) $4\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. **837.** г) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; д) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; е) $\frac{1}{4}$. **838.** в) $2\sin^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; г) $2\sin^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; д) $2\,\mathrm{tg}\,a\sin^2\frac{a}{2}$; е) $2\,\mathrm{ctg}\,b\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}\right)$; ж) $2\,\mathrm{tg}\,a\cos^2\frac{a}{2}$; з) $2\,\mathrm{ctg}\,x\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; и) $\cos 2a$; к) $-\cos 2b$; л) $4\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)$; м) $4\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. **839.** а) k; б) $\frac{t^2-s^2}{t^2+s^2}$, $\frac{2ts}{t^2+s^2}$. **845.** 2208 ц; 900 ц. **846.** 336 см^3; 423 см^3. **847.** 112 см^3; 108 см^3. **856.** $-\mathrm{tg}\frac{a}{2}$. **857.** а) 0; б) $-2\,\mathrm{ctg}\,x$; в) 0; г) $-\mathrm{ctg}^2 t$; д) $\cos^3 a$; е) -1. **858.** а) $\cos\beta$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 1. **859.** а) $\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{3}$; б) $\frac{19}{70}$; в) 11; г) 2. **860.** а) 0; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 0; д) 0; е) 1; ж) 0; з) 1; и) -3; к) 0. **862.** а) $1+\sqrt{2}\sin x$; б) $\sin 2a$; в) 1; г) 1; д) $2\cos 4a-1$; е) $\mathrm{tg}\,2r$; ж) $2|\mathrm{ctg}\,y|$; з) $|\sin x-\sin y|$; и) $2\left|\sin\frac{u-v}{2}\right|$; к) -4; л) $\mathrm{tg}\,p\,(2\sin 2p-1)$. **865.** а) $2-\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $8\sqrt{3}$; г) 2. **866.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{3}{4}$; г) 1,5; д) 9; е) 3. **867.** а) $-\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{2}$; д) 1; е) $\frac{3}{2}$. **868.** а) $-\frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{7a}{2}}{2\cos\left(a-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(a+\frac{\pi}{3}\right)}$; б) $-2\cos\left(2b+\frac{\pi}{3}\right)$; в) $-8\cos 2c$; г) $\sin^2(z-t)$; д) 4; е) $\sin 2x\sin 2y$; ж) $\frac{\sin d\sin\frac{9d}{2}}{\cos\frac{3d}{2}}$; з) $\mathrm{tg}(i-j)\,\mathrm{tg}(j-k)\,\mathrm{tg}(k-i)$; и) 3; к) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+e\right)$. **872.** а) $\frac{3}{16}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 3; д) -7; е) 2. **873.** а) 2; б) $\frac{3t^2-1}{2}$; в) 1; г) a^4-4a^2+2; д) 0; е) $-\frac{3}{2}$. **875.** а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{44}{125}$; в) $\frac{9}{4}$; г) 5,5; д) $-\frac{19}{360}$; е) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **876.** а) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{\pi}{5}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\sqrt{\frac{3}{11}}$. **878.** $\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$. **879.** а) 0; б) 1; в) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; г) $\frac{1}{8}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{512}$. **880.** г) $\frac{3}{4}\sin 4t$; д) $\mathrm{tg}\,5a$; ж) $\sqrt{5}$. **883.** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$. **890.** 1,5 г. **891.** 42 м.

Раздел V

902. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **903.** $4\sqrt{17}$ см или $12\sqrt{7}$ см; 32 см; $4\sqrt{17}$ см. **914.** 24 см. **915.** 7,8 м. **916.** 18 см. **921.** б) 90°, 150°, 30°, 90°. **923.** $9\sqrt{2}$ см^2. **925.** 6,5 см. **926.** а) 13 см; б) 30 см; в) $\sqrt{q^2-p^2+r^2}$; г) $\sqrt{l^2-k^2+2m^2}$. **927.** 15 см. **928.** 15 см. **929.** 12 см. **930.** а) 1,8; б) $2\frac{5}{12}$; в) 3. **931.** 36 см. **932.** 3200 мм^2. **933.** 23 см. **934.** $24\sqrt{10}$. **935.** 296 см^2. **936.** 60 см, 36 см. **937.** 20 см, 24 см. **938.** 12 см. **940.** а) 1250; б) $2500\sqrt{2}$; в) 2500; г) 5000. **942.** а) 4; 1; б) 4; 1; в) $2+\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $2+\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $2+2\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **944.** а) $\{-1\}\cup[1;+\infty)$; б) $(-\infty;-1)\cup[3;7]$; в) $(-\infty;-1)\cup\left[1-\sqrt{2};0\right)\cup\left(1;1-\sqrt{2}\right]$; г) $[-2;2]$. **945.** а) $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$; б) $[-2;1]$. **949.** а) 1; б) -24. **951.** 25 кг. **952.** 20 %, 60 %. **959.** а) $\frac{d}{\cos\beta}$, $d\,\mathrm{tg}\,\beta$; б) $m\cos\beta$, $m\sin\beta$. **960.** а) 2 см; б) $4\sqrt{2}$ см. **961.** 6 см, 15 см. **962.** а) 41 см, 55 см; б) 40 см, 80 см. **963.** $\sqrt{2}$ м. **964.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{\frac{5+3\cos\beta}{2}}$. **965.** 3 см; 7,5 см. **966.** 20 см. **973.** $12{,}5\sqrt{337}$ см^2. **974.** 10 см, 6 см. **975.** $\frac{mp}{p+q}$ или $\frac{mq}{p+q}$. **976.** 60 см. **977.** 120 см. **978.** а) 56; б) 20. **979.** а) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; б) $\frac{\sqrt{94}}{8}$; в) условие противоречивое. **980.** 270 см^2. **984.** 12 см, $4\sqrt{10}$ см. **985.** 16 см, 34 см. **988.** 12,5 см, 25 см. **991.** 8 дм, 17 дм, $\sqrt{176{,}5}$ дм. **992.** $\sqrt{m^2\sin^2\beta+n^2}$. **993.** б) 51 дм; в) $\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+h^2}$. **994.** 7,5 см. **995.** 5 см. **996.** 20; $5\sqrt{3}$. **997.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$; $\frac{a\sqrt{39}}{8}$. **998.** 40 см, 16 см. **999.** $\sqrt{2y^2-x^2}$. **1000.** 2,5 см, $\frac{\sqrt{41}}{2}$ см, $\frac{\sqrt{61}}{2}$ см, $2{,}5\sqrt{17}$ см.

1001. 18 м и 12 м. 1002. $16\left(3+\sqrt{17}\right)$. 1003. 6 см. 1005. а) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{m}{2}$; в) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. 1006. 30°. 1007. а) $d\sqrt{2}$; б) $d\sqrt{6}$. 1008. а) $d\sqrt{7}$; б) $2d$. 1010. $3d$. 1012. 45°. 1013. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. 1014. 45°. 1015. $5\sqrt{5}$ мм. 1017. $\frac{2h^2\sqrt{7}}{3}$. 1018. а) a; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a}{\sqrt{6}}$. 1019. $\frac{abc}{\sqrt{a^2(b^2+c^2)+4b^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{b^2(a^2+c^2)+4a^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{c^2(a^2+b^2)+4a^2b^2}}$. 1020. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 1021. $\frac{a}{2b}\sqrt{3b^2-a^2}$. 1022. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 1023. $\frac{a}{4b}\sqrt{4b^2-a^2}$. 1030. 36 мм, 50 мм, 60 мм, $2\sqrt{769}$ мм; 60 мм, 30 мм, 20 мм, 50 мм. 1031. 1440 мм^2; 2816 мм^2. 1049. 10 см. 1050. 27 см. 1051. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. 1052. $2l^2$. 1053. а) $\frac{c\sqrt{3}}{4}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$. 1054. 3,36 см. 1055. а) $8\sqrt{3}$ см; б) $112\sqrt{3}$ см^2. 1056. 4 м. 1057. 90°, 45°, 90°. 1058. 60°. 1059. а) $5\sqrt{6}$; б) $5\sqrt{2}$. 1060. $a\sqrt{2}$. 1061. $\arccos\frac{1}{3}$. 1062. 60°. 1064. $\sqrt{217}$ см. 1065. $2a$. 1066. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 1067. $\sqrt{c^2+d^2+l^2}$; $\sqrt{c^2+l^2}$; $\sqrt{d^2+l^2}$. 1068. 6 см. 1069. а) 42 см; б) $8\sqrt{3}$ см; в) $2x$. 1070. arccos 0,8. 1071. $\arcsin\sqrt{0{,}6}$. 1072. 45°. 1073. $\frac{a}{2}$. 1074. 27 дм^2. 1075. 90°; 90°; arccos 0,8. 1076. $\arccos\frac{1}{3}$. 1077. $\arccos\frac{a}{\sqrt{3(4b^2-a^2)}}$; $\arccos\frac{2b^2-a^2}{4b^2-a^2}$. 1078. $\arccos\left(-\frac{1}{6}\right)$; $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. 1079. $\arccos\frac{a}{\sqrt{4b^2-a^2}}$; $\arccos\frac{a^2}{a^2-4b^2}$. 1081. а) $-\frac{71}{43}$; б) $-\frac{1}{83}$. 1083. а) $\frac{2\sin 41°}{\cos 19°}$; б) $\frac{\sqrt{2}\cos 16°}{\sin 29°}$; в) $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{3}-z\right)}{\cos^2 z}$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+b\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-b\right)$; д) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+b\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-b\right)$; е) $-\sin\left(\frac{\pi}{6}+u\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-u\right)$. 1084. а) $4\sin\frac{a-b}{2}\sin\left(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $4\cos\frac{a+b}{2}\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; в) $2\sqrt{2}\cos\frac{g}{2}\cos\left(\frac{g}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$. 1085. а) $-\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$; б) $\frac{\cos\frac{k+1}{2}\alpha\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

1086. а) –2,4; –1,2; б) 0; $-7+2\sqrt{3}$; в) –1; –401,6; г) –2; 4. 1087. а) $(-\infty;\ 1)$; б) $(-1;\ -0{,}5)\cup(1;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -1]\cup\left(\frac{2}{3};\ 1\right]\cup(4;\ +\infty)$ г) x — *любое число*.

1088. 240 Вт; 2310 Вт. 1089. 1600 Вт; 320 Вт.

Раздел VI

1103. а) [0; 1]; б) [–1; 0]; в) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};-1\right]$; г) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$; д) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right]$; е) $\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. 1113. 20 см. 1114. 60 см. 1115. 9 см. 1116. 14 см. 1117. а) 15 см; б) 75 см^2. 1118. 350 см^2. 1119. а) 15 см, 13 см; 9 см, 5 см; б) 420π см^2, 70π см^2; в) $2\sqrt{14}$ см, $2\sqrt{14}$ см. 1120. а) 10 см, 6 см; 20 см, 9 см; б) 96π см^2, 261π см^2; в) 8 см, $\sqrt{319}$ см. 1134. а) [–1; 0]; б) [–1; 0]; в) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; д) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right]$; е) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right]$. 1148. а) $2a\sqrt{1-a^2}$; б) $1-2a^2$; в) $\sqrt{1-a^2}$; г) $\sqrt{1-4a^2}$. 1151. $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$. 1153. б) $130\sqrt{3}$. 1155. 20 см, 25 см; 480 см^2, 900 см^2. 1156. 180 км, 360 км; 60 км/ч, 40 км/ч. 1190. а) $\frac{1+3a}{1-3a}$; б) $\frac{3a-4a^3}{(1-4a^2)\sqrt{1-a^2}}$; в) $\frac{4a^3-3a}{(4a^2-1)\sqrt{1-a^2}}$; г) $\frac{1-a^2}{2a}$; д) $\frac{1}{a}$; е) $4a(1-2a^2)\sqrt{1-a^2}$. 1191. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) нет корней; г) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$. 1192. 4 см. 1193. 13 см. 1194. $20\sqrt{2}$. 1195. $\sqrt{2a^2-b^2}$; $\sqrt{b^2-a^2}$. 1196. $72\sqrt{3}$ см^2. 1198. 12 см, 18 см. 1199. 15 км/ч, 12 км/ч. 1209. а) 4π; б) 2π; в) -3π; г) 4π. 1210. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ см. 1211. $\frac{a\sqrt{l^2+a^2\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}$. 1212. 2,5 см. 1213. $\sqrt{z^2+y^2-\frac{y^4}{x^2}}$. 1215. 25 см, 15 см. 1219. а) Нет корней; б) $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$; в) $(-1)^{k+1}\ \frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$; г) $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$; д) нет корней; е) нет корней. 1220. а) $(-1)^k\ \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$; б) $(-1)^{k+1}\ \frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in Z$; в) $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$; г) $\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi,\ k\in Z$; д) $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$; е) $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z$. 1221. а) $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+k\pi,\ k\in Z$; б) нет корней; в) $\pm\arccos\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in Z$; г) $(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{39}-3}{4}+k\pi,\ k\in Z$; д) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $\mathrm{arctg}\ 1{,}5+n\pi,\ n\in Z$; е) $\mathrm{arctg}\ 3+k\pi,\ k\in Z$; $-\mathrm{arctg}\ 4+n\pi,\ n\in Z$; ж) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; з) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. 1222. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $(-1)^n\arcsin\frac{2}{3}+n\pi,\ n\in Z$; в) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$; $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in Z$; г) $2\pi k,\ k\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; д) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; е) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; ж) $2\pi k,\ k\in Z$; $\pm\arccos 0{,}2+2\pi n,\ n\in Z$; з) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; и) $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; к) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. 1223. а) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; в) $\frac{\pi}{6}+\pi k,$

$k\in Z$; г) $-\text{arctg}\,\frac{5}{3}+\pi k,\ k\in Z$; д) $\text{arctg}\,2+\pi k,\ k\in Z$; е) $-\text{arctg}\,\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z$; ж) $\frac{1}{2}\,\text{arctg}\,1{,}5+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; з) $\text{arctg}\,\sqrt{2}\,\pi k,\ k\in Z$. **1224.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $\text{arctg}\,3+\pi n,\ n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $\text{arctg}\,\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$; в) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $\text{arctg}\,2+\pi n,\ n\in Z$; г) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $-\text{arctg}\,0{,}5+\pi n,\ n\in Z$; д) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $-\text{arctg}\,\frac{2}{7}+\pi n,\ n\in Z$; е) $\text{arctg}\,\frac{\sqrt{6}}{2}+\pi k,\ k\in Z$; ж) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; з) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$. **1225.** а) $\text{arctg}\,0{,}5+\pi k,\ k\in Z$; $-\text{arctg}\,2+\pi n,\ n\in Z$; б) $\text{arctg}\,0{,}5+\pi k,\ k\in Z$; в) $\frac{1}{2}\,\text{arctg}\,\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$; г) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; $-\frac{1}{2}\,\text{arctg}\,0{,}5+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. **1226.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $\text{arctg}\,2+\pi n,\ n\in Z$; б) $\text{arctg}\left(-1\pm\sqrt{3}\right)+k\pi,\ k\in Z$; в) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $\text{arctg}\,3{,}5+\pi n,\ n\in Z$; г) $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$; $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **1227.** а) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; $(-1)^{n+1}\,2\pi+12\pi n,\ n\in Z$; б) $\pm\pi+8\pi k,\ k\in Z$; $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; в) $-\frac{\pi}{6}+(-1)^k\,\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; $-\text{arctg}\,0{,}5+\pi n,\ n\in Z$; г) $-\frac{\pi}{4}\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; $\text{arctg}\,3+\pi n,\ n\in Z$. **1228.** а) $\pi k,\ k\in Z$; $(-1)^{n+1}\,\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; в) $\pi k,\ k\in Z$; $-\text{arctg}\,3+\pi n,\ n\in Z$; г) $\pi k,\ k\in Z$; д) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; е) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; ж) $\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; з) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; $(-1)^n\,\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$; и) $\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; к) $\pi k,\ k\in Z$; л) $\pi k,\ k\in Z$; м) $\frac{\pi}{8}k+n\pi,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ n\in Z$. **1229.** а) $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; б) $\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; в) $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; г) $\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$; д) $\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$; е) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; ж) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ n\in Z$; з) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$; и) $\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; к) $\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6},\ n\in Z$. **1230.** а) $\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$; $(-1)^n\,\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$; б) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$; $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; в) $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; г) $\frac{2\pi k}{5},\ k\in Z$; $\pi+2\pi n,\ n\in Z$; д) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; $\frac{2\pi m}{5},\ m\in Z$; е) $2\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi(2m+1)}{5},\ m\in Z$. **1231.** а) $\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; б) $\frac{\pi k}{6},\ k\in Z$; в) $\frac{\pi k}{5},\ k\in Z$; г) $\frac{\pi k}{8},\ k\in Z$. **1232.** а) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$; $\text{arctg}\,2{,}5+\pi n,\ n\in Z$; б) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; в) $\pi k,\ k\in Z$; г) $(-1)^k\,\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+k\pi,\ k\in Z$; д) $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; е) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$. **1233.** а) $-\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; б) $2\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; в) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$;

$-\pi+2\pi n,\ n\in Z$; г) $-\frac{\pi}{6}\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; д) $\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z$; е) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; ж) $\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; з) нет корней. **1234.** а) $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{6},\ k\in Z$; $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{3\pi}{32}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$; $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; в) $\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; г) $\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$. **1235.** а) $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$. **1236.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $-\text{arctg}\,\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$; в) $2\,\text{arctg}\,\frac{-2\pm\sqrt{13}}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; г) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $2\,\text{arctg}\,\frac{2}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; д) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $-2\,\text{arctg}\left(4+\sqrt{15}\right)+2\pi n,\ n\in Z$; е) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $\text{arctg}\,\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$; ж) $2\,\text{arctg}\,\sqrt{7}+2\pi k,\ k\in Z$; з) $-\frac{\pi}{12}\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$. **1237.** а) Нет корней; б) нет корней; в) $\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; г) нет корней; д) нет корней; е) $\frac{3\pi}{2}+2\,k\pi,\ k\in Z$; ж) нет корней; з) нет корней. **1238.** а) $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$; б) нет корней; в) нет корней; г) $20\pi k,\ k\in Z$; д) нет корней; е) $2\pi k,\ k\in Z$; ж) $2\pi k,\ k\in Z$; з) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$. **1240.** а) Нет корней; б) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; в) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; г) $\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$; д) $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; е) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}r+2\pi k,\ k\in Z$, $r=0,\ 2,\ 3,\ 4$. **1241.** 102 см². **1242.** 17 см. **1243.** 12 м. **1244.** 1,5a. **1245.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **1246.** а) $\sqrt{d^2-m^2}$; б) $\sqrt{m^2-l^2}$; в) $\frac{l}{m}\sqrt{m^2-l^2}$. **1247.** а) 30 см, 45 см; б) 42 см, $31\sqrt{2}$ см. **1248.** 64 кг, 36 кг. **1265.** а) 17; −17; б) 17; −17; в) 13; −13; г) 30; −20; д) $\sqrt[4]{2}$; 0; е) не существует; 0,5. **1273.** 10; −6. **1275.** 105π. **1276.** а) [0; 1], $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[-\sqrt{2};\ -1\right]\cup\left[1;\ \sqrt{2}\right]$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; в) R, $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$, [−1; 1], $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$; г) R, $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$; д) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$, $(-\pi;\ 0)\cup(0;\ \pi)$; ж) [0; 1], $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; з) {0}, $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; и) R, {0}. **1277.** а) $4\sqrt{73}$ м; б) 14 м. **1278.** а) $\sqrt{d^2-\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt{d^2-6{,}25}$; в) $\sqrt{d^2-\frac{64}{7}}$. **1279.** а) $\sqrt{d^2-1}$; б) $\sqrt{d^2-\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; в) $\sqrt{d^2-4-2\sqrt{3}}$. **1280.** $\frac{5}{6}\left(\sqrt{61}-5\right)$ см. **1281.** $\text{arctg}\,\sqrt{2}$. **1282.** 113 см. **1283.** 58,2 кг; 25,0 кг. **1296.** а) $\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right],\ k\in Z$; б) $\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{3}+2k\right),\ k\in Z$; в) $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right],\ k\in Z$; г) $\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{7\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in Z$; д) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right],\ k\in Z$; е) $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{7\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in Z$; ж) $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right],\ k\in Z$; з) $\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in Z$.

1297. а) $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{3}+k\pi\right]$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in Z$; в) $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in Z$; г) $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ -\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k\in Z$; д) $\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$, $k\in Z$; е) $\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k\in Z$; ж) $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k\in Z$; з) $\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$, $k\in Z$. **1298.** а) $\left(\frac{5\pi}{12}+k\pi;\ \frac{13\pi}{12}+k\pi\right)$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{2}+6\pi k;\ \frac{\pi}{2}+6\pi k\right)$, $k\in Z$; в) $\left(-\frac{4\pi}{3}+4\pi k;\ -\frac{2\pi}{3}+4\pi k\right)$, $k\in Z$; г) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5};\ \frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}\right)$, $k\in Z$; д) $\left[\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in Z$; е) $\left(-\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi k}{3}\right)$, $k\in Z$; ж) $[4\pi k;\ \pi+4\pi k]$, $k\in Z$; з) $\left(\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k\in Z$.

1299. а) $\left[\pi+2k\pi;\ \frac{7\pi}{3}+2k\pi\right]$, $k\in Z$; б) $\left(\pi+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in Z$; в) $\left[\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2};\ \frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right]$, $k\in Z$; г) $\left(-\frac{19\pi}{24}+2k\pi;\ -\frac{11\pi}{24}+2k\pi\right)$, $k\in Z$.

1300. а) $\left(k\pi;\ \frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};\ -\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right]$, $k\in Z$; в) $\left(\frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}\right]$, $k\in Z$; г) $\left(-\frac{\pi}{8}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$; д) $\left[4\arcsin\frac{2}{3}+8\pi k;\ 4\pi-4\arcsin\frac{2}{3}+8\pi k\right]$, $k\in Z$; е) $\left(3\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+6\pi k;\ 6\pi-3\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)+6k\pi\right)$, $k\in Z$; ж) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}0{,}6+\frac{k\pi}{2}\right]$, $k\in Z$; з) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\arcsin 0{,}4+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arcsin 0{,}4+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k\in Z$. **1301.** а) $\left(\frac{\pi}{3}+k\pi;\ \frac{2\pi}{3}+k\pi\right)$, $k\in Z$; б) $\left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k\in Z$; в) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$; г) $\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}\cup\left(\pi+2k\pi;\ \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right]\cup\left(0;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k\in Z$. **1302.** ж) $(2\pi k,\ \pi+2\pi k)$, $k\in Z$; з) $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ 2k\pi\right)\cup\left(2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in Z$; и) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; к) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **1303.** а) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{13\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left(-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k;\ \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; в) $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+k\pi\right)$, $k\in Z$; г) $\left(-\frac{\pi}{3}+k\pi;\ \frac{\pi}{3}+k\pi\right)$, $k\in Z$; д) $\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\pi\right)\cup\left(k\pi;\ \frac{\pi}{6}+k\pi\right)$, $k\in Z$; е) $\left(\frac{\pi}{3}+k\pi;\ \frac{2\pi}{3}+k\pi\right)$, $k\in Z$.

1304. а) $\left(\frac{25\pi}{18}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{3\pi}{4}+k\pi;\ -\frac{5\pi}{12}+k\pi\right)$, $k\in Z$; в) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in Z$; г) $\left(\operatorname{arctg}2+2k\pi;\ \arcsin\frac{4}{7}+2k\pi\right)\cup$ $\left(\pi-\arcsin\frac{4}{7}+2k\pi\right)\cup(\pi+\operatorname{arcctg}2+2k\pi;\ 2\pi(k+1))$, $k\in Z$.

1305. а) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \pi+\pi k\right)$, $k\in Z$; в) $\left(\frac{\pi+2\pi k}{3};\ \frac{5\pi+6\pi k}{9}\right)$, $k\in Z$; г) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; д) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; ж) $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right)\cup\left(\operatorname{arctg}3+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$; з) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; и) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **1306.** а) $\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{2\pi}{5}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{5}+2\pi k;\ \frac{4\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{6\pi}{5}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{8\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{9\pi}{5}+2\pi k;\ 2\pi(k+1)\right)$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5};\ -\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi k}{5}\right)\cup\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5};\ \frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi k}{5}\right)$, $k\in Z$; в) $\left(2\pi k;\ \frac{2\pi}{9}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{8\pi}{9}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{14\pi}{9}+2\pi k\right)\cup\left(\pi+2\pi k;\ \frac{11\pi}{9}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{9}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{14\pi}{9}+2\pi k;\ \frac{17\pi}{9}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; г) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; д) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; е) $\left[\frac{5\pi}{12}+\pi k;\ \pi+\pi k\right)\cup\left(\pi+\pi k;\ \frac{13\pi}{12}+\pi k\right]$, $k\in Z$; ж) $\left(\pi+\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k;\ 2\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; з) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

1307. а) $\left(\frac{5}{6}+2k;\ \frac{13}{6}+2k\right)$, $k\in Z$; б) $x\neq\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; в) $\left(-\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; г) $\left[-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; д) $\left(\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi k;\ 2\pi-\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; ж) $\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$, $k\in Z$; з) $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in Z$. **1308.** а) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\pi+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ 2\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in Z$; в) $\left(\pi-\arcsin\frac{5+\sqrt{61}}{36}+2\pi k;\ 2\pi+\arcsin\frac{5+\sqrt{61}}{36}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; г) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{2\pi}{2}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)\cup$ $\left(\pi+2\pi k;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; д) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; е) $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

1309. $\frac{m}{2}$. **1310.** $2{,}24\sqrt{3}$ см. **1311.** а) 8 см; б) $24\sqrt{2}$ см^2. **1312.** $8\sqrt{2}$. **1313.** 595 км.

Раздел VII

1362. 0,43 л. **1363.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **1365.** $a^2(1+\sqrt{5})$. **1366.** $\frac{100}{\sqrt{3}}$ мм. **1368.** 24 м^2. **1369.** $\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$. **1370.** 21 см. **1371.** 28 см. **1375.** $\frac{3m^2\sqrt{15}}{16}$. **1376.** $\frac{7+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$. **1377.** $1{,}6+2\sqrt{2}$ м. **1393.** 806 ц, 819 ц. **1404.** 0 и $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1405.** $\sqrt{3}$ и $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

1409. На 90°. **1441.** $\frac{3m^2\sqrt{11}}{4}$. **1443.** 30 см, 35 см, 42 см. **1447.** $\frac{a}{4}\sqrt{4h^2+3a^2}$. **1448.** $2\sqrt{122}$ дм. **1450.** 13 см. **1451.** 90°. **1452.** $7\sqrt{34}$ см. **1453.** $324\sqrt{2}$ см². **1454.** 22,75 см. **1455.** 12 см. **1456.** $144\sqrt{2}$ см². **1457.** 24 см. **1458.** 3,4 м. **1459.** $\frac{2h^2}{3}$. **1460.** $6\sqrt{17}$ см. **1461.** 120°. **1462.** $10\sqrt{2}$ см. **1463.** 6 см, 18 см. **1464.** $\sqrt{l^2-a^2}$. **1465.** $\sqrt{13}$ см. **1466.** $\sqrt{k^2+l^2-m^2}$. **1467.** 60 см. **1468.** $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. **1469.** 8 см, 17 см. **1470.** $\sqrt{2}\sin\beta$. **1471.** $\arccos\frac{17\sqrt{3}}{36}$. **1472.** 90°. **1473.** 8 см. **1474.** $\frac{d_1+d_2+d_3}{3}$. **1475.** 109 см. **1476.** а) $\sqrt{x^2-x+\frac{3}{4}}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}(1-x)$. **1477.** 6 м. **1478.** а) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\sqrt{2}-1$; б) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $2-\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$; $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$; г) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$; $\sqrt{4-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}-1$; д) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $2+\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $-\sqrt{2}-1$. **1480.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) 1; е) $\sqrt{3}$. **1489.** а) $\frac{4d^2-4}{(d^2+d+1)^2}$; б) $\frac{d^4-3d^2}{(d^2-1)^2}$; в) $\frac{\sqrt{d}(d+3)}{(d-1)^2}$; г) $1-\frac{1}{\sqrt{d}\left(\sqrt{d}-1\right)^2}$; д) $\frac{1}{(d+1)^2}$; е) $\frac{5}{6\sqrt[6]{d}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{d^2}}$. **1490.** а) 0; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$. **1497.** $\frac{2aH\sqrt{3}}{9}$. **1498.** 2 см³. **1458.** а) $y=x$; б) $y=x-6{,}25$. **1503.** а) $\left(\sqrt[4]{27};\ 9\sqrt[4]{3}\right)$, $\left(-\sqrt[4]{27};\ -9\sqrt[4]{3}\right)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ -\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right)$. **1505.** а) 5,02; б) 3,988; в) 0,24; г) 0,504. **1506.** а) $F(x)=2(2x+5)^{1,5}$; б) $F(t)=-t-\frac{1}{3}t^3+3$; в) $F(x)=(3x-5)^{\frac{1}{3}}$; г) $F(x)=-0{,}2x^{-5}+9{,}4$.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I. ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

Раздел II. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ

Раздел III. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Раздел IV. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Раздел V. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Раздел VI. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Раздел VII. ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебное издание

Латотин Леонид Александрович
Чеботаревский Борис Дмитриевич

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для 11 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *А. Л. Разумовская*. Технические рисунки *А. Л. Латотина*. Художественный редактор *А. А. Волотович*. Технический редактор *М. И. Чепловодская*. Компьютерная верстка *А. В. Голоскок*. Корректоры *В. С. Бабеня, А. В. Алешко, Е. П. Авдей, Д. Р. Лосик, Т. Н. Ведерникова*.

Подписано в печать 06.08.2007. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 28 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 19,75 + 0,25 форз. Тираж 5035 экз. Заказ 2149.

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0131732 от 01.04.2004.
220004, Минск, проспект Победителей, 11.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
220600, Минск, Красная, 23.

Латотин, Л. А.

Л27 Математика : учеб. пособие для 11-го кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский; пер. с белорус. яз. И. П. Ефременко. — Минск : Нар. асвета, 2007. — 445 с. : ил.

ISBN 978-985-12-1868-0.

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721

Производная

Производные некоторых функций

$c' = 0$

$(ax + b)' = a$

$(ax^2)' = 2ax$

$(x^3)' = 3x^2$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$

$\mathrm{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 u}$

$\mathrm{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 u}$

Правила нахождения производных

$(u + v)' = u' + v'$

$(u - v)' = u' - v'$

$(cu)' = cu'$

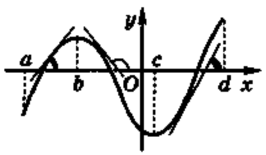
$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

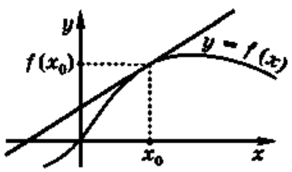
$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$

Исследование функции



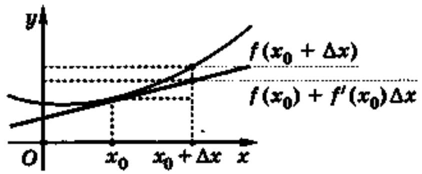
Аргумент x	$(a; b)$	b	$(b; c)$	c	$(c; d)$
Производная y'	Положительна	Равна нулю	Отрицательна	Равна нулю	Положительна
Функция y	Возрастает ↗	Имеет максимум	Убывает ↘	Имеет минимум	Возрастает ↗

Касательная к графику функции



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Приближенные вычисления



$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Первообразная

Первообразные некоторых функций

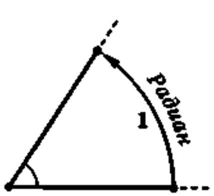
Функция	*Первообразная*
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$

Правила нахождения первообразных функций

Функция	*Первообразная*
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$
$af(x)$	$aF(x)$
$f(ax + b)$	$\frac{1}{a}F(ax + b)$

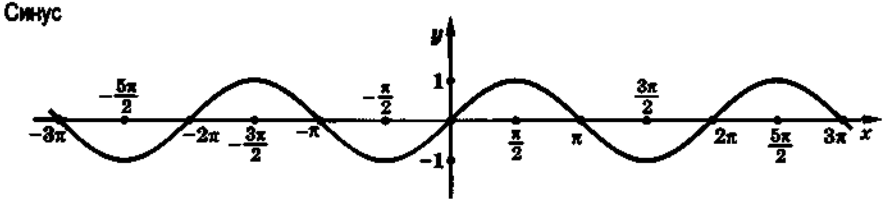
Синус, косинус, тангенс, котангенс

Градусы	30	45	60	90	120	135	150	180
Радианы	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

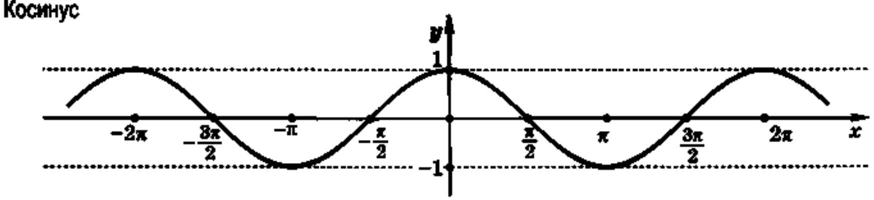


$1^\circ = 57^\circ\,17'\,45''$

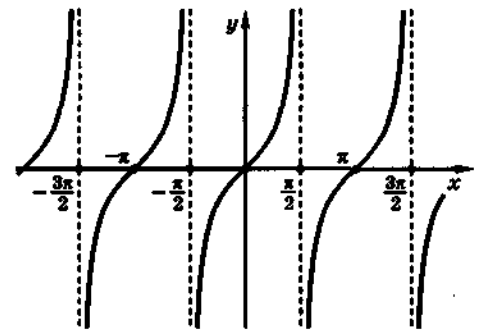
Синус



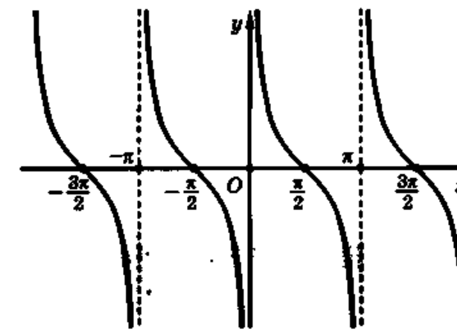
Косинус



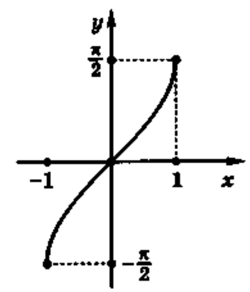
Тангенс



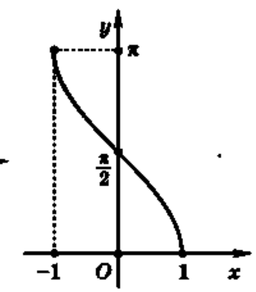
Котангенс



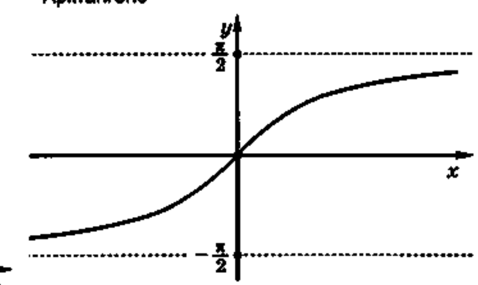
Арксинус



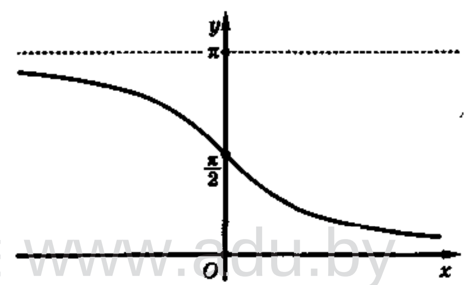
Арккосинус



Арктангенс



Арккотангенс



$\cos(-t) = \cos t$;
$\sin(-t) = -\sin t$;
$\mathrm{tg}(-t) = -\mathrm{tg}\, t$;
$\mathrm{ctg}(-t) = -\mathrm{ctg}\, t$.

Если $a \in [-1; 1]$, то:
$\arcsin(-a) = -\arcsin a$;
$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Для любого действительного a:
$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$;
$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$.